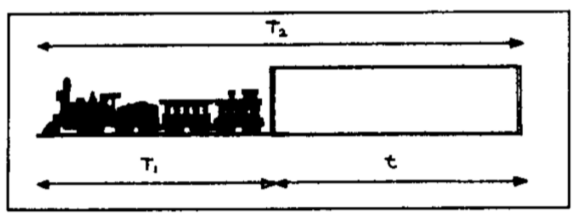
Olimpiada Nacional de Física 1991.
Examen Teórico.

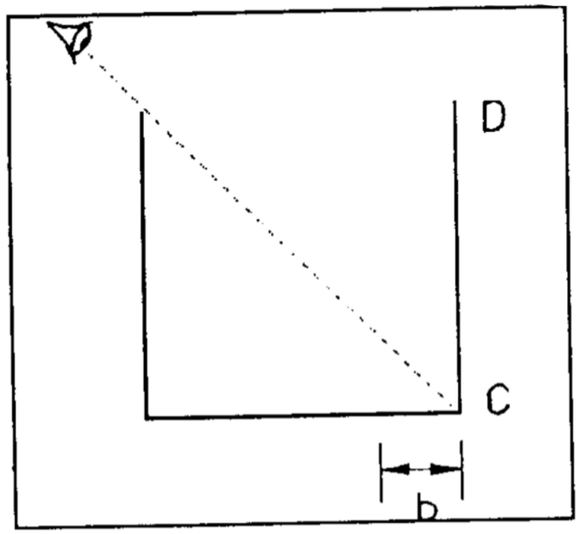
Problema 1.

Un tren pasa frente a un observador durante T_1 segundos y a lo largo de un túnel de longitud L metros durante $T2$ segundos. Tenga en cuenta el paso del tren a lo largo del túnel desde la entrada hasta la salida del ultimo vagón. Considere que el túnel es más largo que el tren. Determina la longitud y velocidad del ferrocarril, teniendo en cuenta que su velocidad es uniforme.



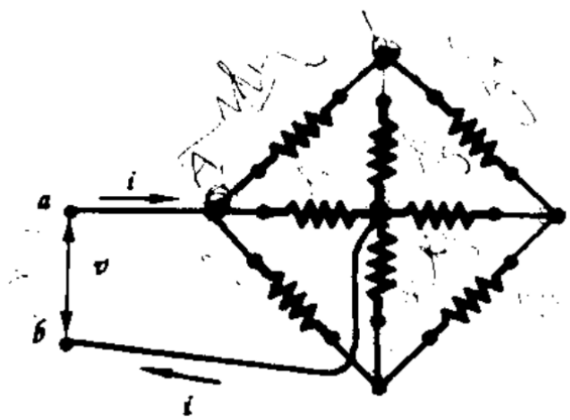
Problema 2.

Un Observador se sitúa frente a un recipiente cúbico de lado "a', de tal manera que ve la totalidad de la cara del CD únicamente. El recipiente esta vació. ¿Cuál será el volumen de agua que se debe verter en el recipiente para que el observador, sin variar su posición, vea un objeto pequeño colocado en el fondo a una distancia b de la cara CD?



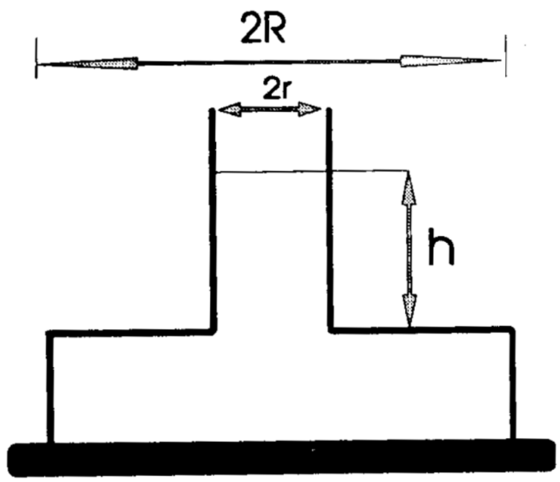
Problema 3.

En la figura todas las resistencias son iguales y de valor $R\Omega$. La resistencia de los alambres conductores es despreciable. El voltaje (o tensión) entre los extremos a y b es v. Determine la intensidad de corriente i entre los cables conectados a la fuente de voltaje.



Problema 4.

Un recipiente consiste en dos cilindros sin fondo y que tiene la forma y dimensiones mostradas en la figura. Se halla sobre un mesa. El borde circular inferior (diámetro $2R$) esta herméticamente en contacto con la superficie de la mesa. El peso del recipiente es P. Dentro del recipiente se vierte un líquido que alcanza la altura h en el tubo delgado, el recipiente, por acción del líquido se comienza al levantar. Calcule al fuerza con la cual el líquido levanta el recipiente. Calcule la densidad del liquido.



Problema 5.

Sobre un platillo suspendido de un resorte de constante k cae un cuerpo de masa m desde la altura h y permanece en él, es decir, el choque con el fondo del platillo se puede considerar completamente inelástico. El platillo de masa M, junto con el cuerpo de masa m empiezan a oscilar. La masa del resorte es despreciable. Determinar la energía cinética del cuerpo de masa m al instante de hacer contacto con el platillo. El platillo y el cuerpo se comienza a mover con una velocidad V. Escriba el principio de conservación de la energía. Tome en cuenta que el momento inicial (cuando el cuerpo hace contacto con el platillo), el resorte se halla estirado una cierta longitud por el peso Mg del platillo. De las consideraciones anteriores, determine cuál es la amplitud de las oscilaciones del sistema.

Olimpiada Nacional de Física 1992.
Cuautla, Morelos.
Examen Téorico.

Problema 1.

Un recipiente de vidrio de gran volumen V, lleno de aire a presión atmosférico, tiene ajustado en su tapa un tubito. El área de la selección trasversal interior del tubito es A.

Desde el extremo superior del tubo se deja caer, a partir del reposo, un cilindro de masa m, que ajusta suficientemente en el tubo. Sin embargo, el rozamiento entre las paredes del tubito y el cilindro es despreciable.

El cilindrito cae una distancia y_f hasta detenerse por primera vez, para después volver a subir, estableciendo un movimiento oscilatorio.

Considere que:

Problema 2.

El valor de la resistencia de la arista de cada uno de los cuadros es $r = 1\Omega$. En el cuadro central se suelda una lamina de un material conductor (área sombreada). Hallar la resistencia entre los puntos A y B.

1. Determine la amplitud de oscilación del cilindro.

2. Determine el periodo d la oscilación del cilindro

Datos :
$A = 3 \times 10^{-4} m^2$.
$V = 5dm^3$
$P = 1 \times 10^5 Pa$.
$Y = C_P/C_V = 1.4$
$M = 10gr$
$g = 9.8m/s^2$

Problema 3.

En control el tiempo que tardara en caer el cubo pequeño, si en un momento dado, una fuerza comienza a actuar sobre el cubo grande la figura. La masa del cubo grande y ambos están hechos del mismo material. El coeficiente de fricción entre los dos cubos es μ. Entre el cubo grande y el piso la fricción es despreciable. La masa del cubo pequeño es m y su arista es L.

Problema 4.

Dentro de una esfera de radio R y de superficie interna especular hay un pedazo de una lente convergente como se muestra en la figura.

Por orificio "O"penetra paralelamente al eje óptico, a una distancia $(R/2)^{1/2}$ del mismo, un rayo de luz. Después de reflejarse dos veces dentro de la esfera, el rayo sale a través del mismo orificio.

Esto significa que se cumpla (justifique su respuesta):

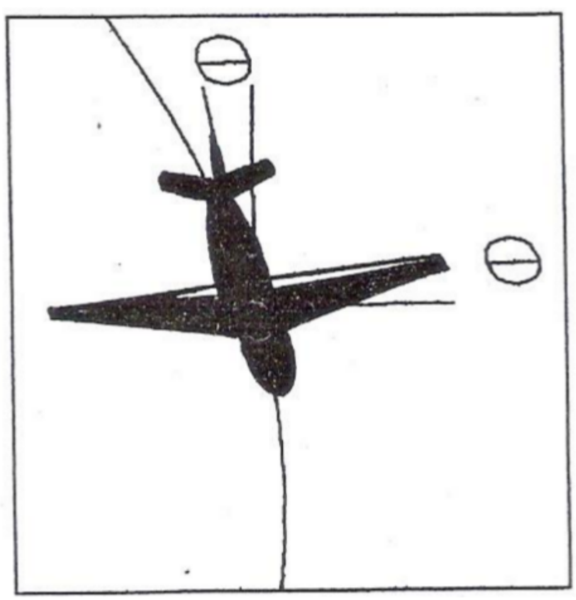
1. $\cos(2\alpha) = 2\,\mathrm{sen}(45 - 2\alpha)$
2. $\tan(\alpha) = \cot(42 + \frac{\alpha}{5})$
3. $\mathrm{sen}(2\alpha) = \frac{1}{2}\cos(18 + \alpha)$
4. $\cos(\alpha = 2^{1/2}\,\mathrm{sen}(27 + \alpha/5)$

Olimpiada Nacional de Física 1993.
Examen Teórico.

Problema 1.

Tres concursantes de la Olimpiada se encuentran tranquilamente disfrutando la playa, cuando uno de ellos observa un avión sobrevolando sus cabezas y dice "El avión vuela en círculos completando un ciclo cada 4 minutos". El segundo dice "La línea imaginaria que une un extremo del ala con el otro extremo hace un ángulo $\theta = 20°$ grados con el horizonte". El tercero dice "La velocidad del avión es...". Cuando una enorme ola revuelca a los tres.

¿Cuál es la velocidad del avión?
Haga un diagrama de fuerzas de cuerpo libre.

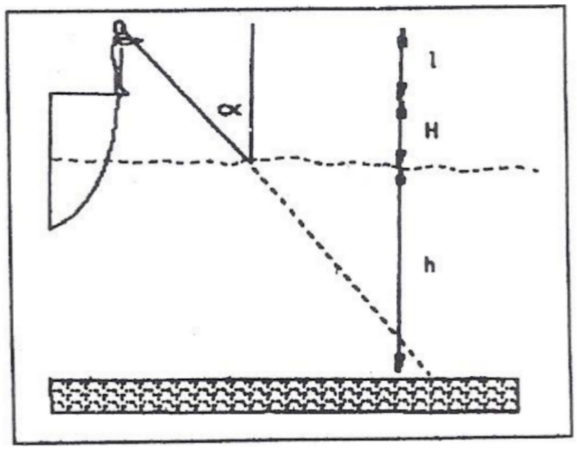


Problema 2.

Un muchacho trabaja en Acapulco en una lancha, recogiendo monedas que arrojan los turistas al mar. Si se arroja desde la lancha a una altura H a recoger una moneda a una profundidad h y sus ojos enfocan la moneda de tal manera que ésta aparece en una línea visual haciendo un ángulo α con la vertical.

¿Con qué velocidad horizontal inicial se tiene que arrojar para recoger la moneda?.

Suponga que los ojos del muchacho están a una distancia l de las plantas de sus pies y que su centro de masa esta en sus pies. Una vez dentro del agua el muchacho desciende voluntariamente. Deje indicado el índice de refracción del agua como n.



Problema 3.

A una delegación estatal le toma 5 horas en automóvil llegar de la capital de su estado al hotel sede de la Olimpiada en Acapulco.

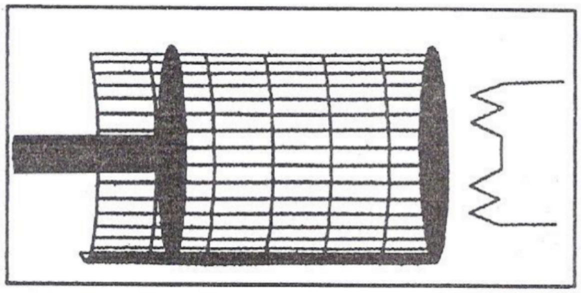
Ya de camino se acuerdan que han olvidado sus trajes de baño al salir. Si continúan viajando llegarán con 2 horas de anticipación al aburrido discurso de bienvenida, pero si deciden regresar por los trajes llegarían 3 horas después de iniciado el discurso y sólo escucharán el final. ¿Qué fracción del recorrido total habían ya viajado al momento de acordarse de los trajes de baño?.

Problema 4.

Un cilindró horizontal cerrado en un extremo y en el otro extremo con un pistón muy ligero de superficie S, tiene un mol de gas ideal a una temperatura T_0 y una presión P_0. La presión externa es constante e igual a P_0.

Por medio de una resistencia una cantidad de calor es transferida lentamente al gas. El gas de calienta y en consecuencia a cierta presión que llamaremos "crítica" P_{crit} el pistón se mueve. La fuerza de fricción F entre el pistón y las paredes del cilindró es constante; la mitad del calor generado por la fricción se transmite al gas. Se considera que tanto las paredes del cilindro como el pistón están aislados térmicamente y se desprecia su capacidad calorífica de ambas.

Nota: puede contestar los incisos en distinto orden.



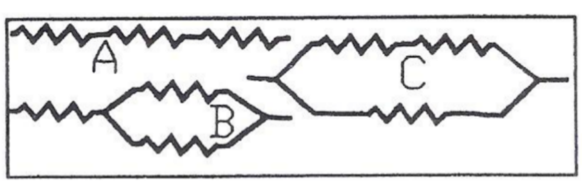
1. Calcule la presión P_{crit} en función de la fuerza de fricción.
2. Calcule la temperatura crítica T_{crit} correspondiente. Llamamos temperatura "crítica" a aquella para la cual el pistón comienza a moverse.
3. Suponiendo que al capacidad térmica del gas por mol $C = \delta Q/\delta T$ es constante. Calcule la cantidad de calor transferido Q_{crit} para que el pistón se mueva.
4. Grafique cualitativamente cómo depende T en función de Q antes de que el pistón se mueva. Recuerde que C es constante.
5. Calcule la cantidad de calor Q_{fr} que se transmite al gas por fricción.
6. Calcule la cantidad de calor total transferida en ambos procesos.
7. Haga una gráfica cualitativa de la temperatura T en función de Q para todos los procesos; esto es, antes y después de que el pistón se mueva.
8. Si la resistencia R está conectada a una fuente de fem en E voltios ¿Cuánto tiempo deberá estar conectada la fuente para que empiece a moverse el pistón?.

Problema 5.

Suponga que en el problema anterior con tres resistencias en paralelo, el gas se calienta u comienza a mover el pistón a los seis minutos.

¿En cuánto tiempo moverán el pistón las diferentes conexiones indicadas a continuación? Todas las resistencias son iguales. (ver figura).

Nota: NO es necesario resolver el problema anterior para resolver este problema.



Olimpiada Nacional de Física 1994.
Estado de México.
Examen Teórico.

Problema 1.

Calcule la capacitancia del sistema de condensadores iguales mostrados en la figura. La capacitancia de cada uno es igual a C.

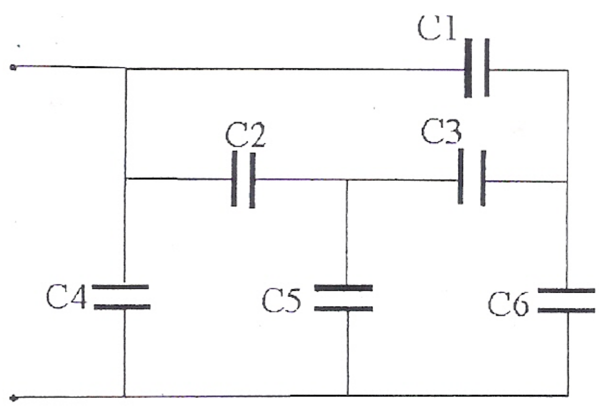


Figura 1: Problema 1

Problema 2.

1. Considere el balancín mostrado en la figura. Cuando el sol se encuentra en el cenit, el balancín proyecta una sombra sobre el piso de longitud $X + Y$. Cuando el balancín se inclina a la derecha, la longitud de la sombra se incrementa de un lado por ΔX y del otro por ΔY. Calcule $\frac{\Delta X}{\Delta Y}$ en función de L y de S.

2. Una estructura articulada consiste de ocho varillas que forman 3 rombos, como se muestra en la figura. Las longitudes de los lados de los rombos se relacionan como $3 : 2 : 1$. El vértice A_3 se desplaza horizontalmente con una rapidez V_0. Determine las velocidades de los vértices A_1 y A_2.
   Determine la velocidad de B_1 cuando los ángulos de los rombos son rectos.

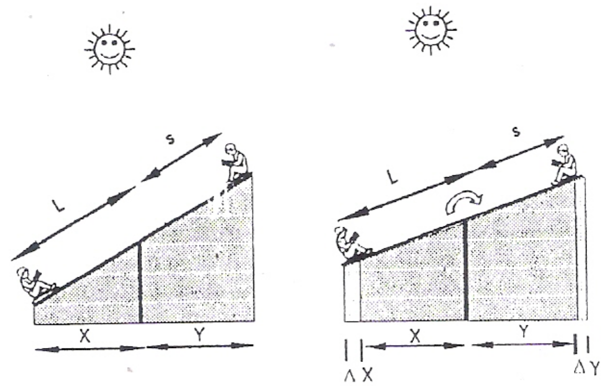


Figura 2: Inciso (a)

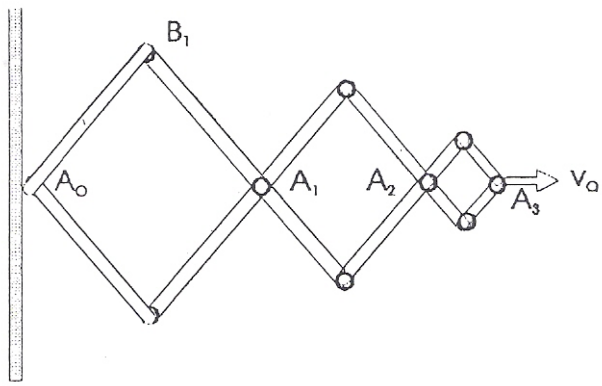


Figura 3: Inciso (b)

Problema 3.

Un cilindro hermético tiene un cubo de hielo de masa $M = 100gr$ que flota en agua. La temperatura del agua es de 0^oC. Dentro del hielo sa halla un balín de plomo de masa $m = 5gr$.

1. ¿Qué cantidad de masa de hielo debe derretirse para que la superficie superior del cubito (sistema balín-hielo) flote a ras del agua?

2. ¿Qué cantidad de calor se necesita para derretir la masa de hielo del inciso anterior?

La densidad del balín de plomo es de $11.3gr/cm^3$; la densidad del hielo $0.9gr/cm^3$; el calor de fusión del hielo $3.3J/kg$. (Ayuda: el sistema se hunde si la densidad promedio del sistema balín-hielo es igual a la densidad del agua).

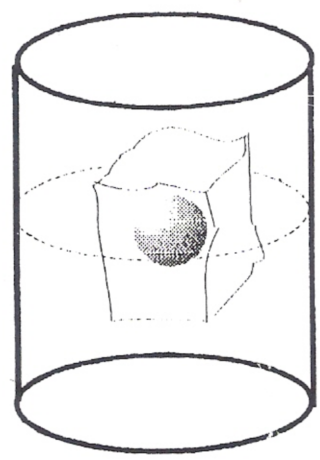


Figura 4: Problema 3

Problema 4.

Una persona A, un letrero B y dos espejos se encuentran en un cuarto como se muestra en la figura. Por construcción a escala investigue lo siguiente:

1. ¿Puede la persona A ver su imagen reflejada en alguno de los dos espejos?

2. El letrero que está en la posición B muestra una letra E ¿Verá la persona en la posición A la letra E en el espejo E_2, invertida (∃)?

3. ¿La persona A puede ver dos imágenes diferentes de la letra E en el espejo E_1?

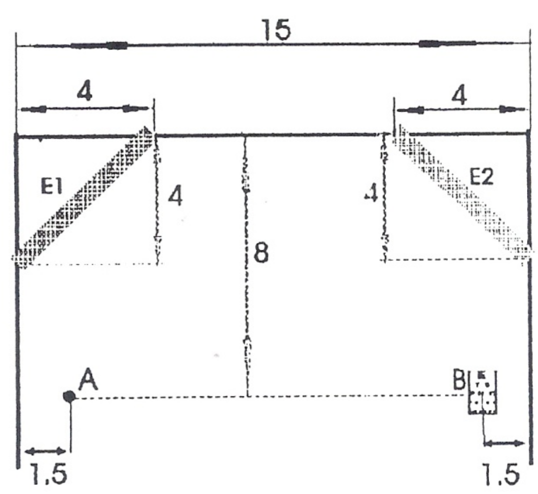


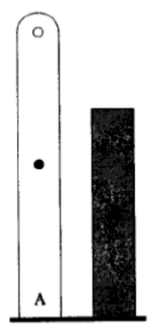
Figura 5: Problema 4

Olimpiada Nacional de Física 1995.
México, DF.
Examen Teórico.

Problema 1.

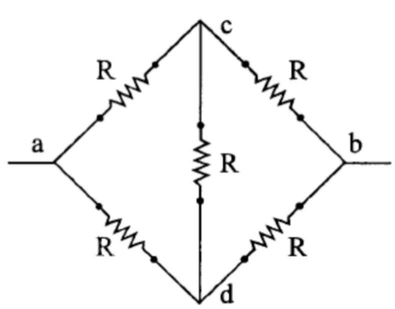
Diseñar un péndulo formado por dos metales A y B para que no cambie por la dilatación térmica la distancia de apoyo al centro de gravedad. Sean α_A y α_B los coeficientes de dilatación térmica de los metales A yB por grado centígrado.

Suponga: $\alpha_A = 0.7 \times 10^{-6}$, $\alpha_B = 11 \times 10^{-6}$ y m_A=m_B las masas de los metales A y B.



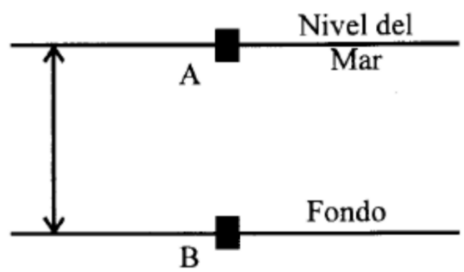
Problema 2.

Encontrar la resistencia equivalente a la del circuito puente con cinco resistencias iguales.



Problema 3.

En la proximidad de las islas Kuriles se encontró en 1874 una fosa marina de profundidad de 8513 m.



1. ¿Cuál es el valor de la presión a dicha profundidad? Tome el valor de la densidad del agua de mar igual a 1.026 g/cm^3.
2. ¿Qué volumen ocuparía allí una cantidad de agua que ocupa un litro en la superficie?
3. ¿Cuál fue el porcentaje de cambio de volumen?

Tome como coeficiente de compresibilidad del agua el valor $0.00005(1/Kg/cm^2)$

Olimpiada Nacional de Física 1996.
Monterrey, Nuevo León.
Examen Teórico.

Problema 1.

Un haz estrecho de luz penetra por la superficie superior del agua contenida en un acuario rectangular, formando un ángulo de incidencia de 40^o. El haz refractado continúa hacia el fondo del acuario, en donde se encuentra colocado un espejo (horizontal), el cual lo refleja hacia la superficie del agua, en donde sufre una nueva refracción saliendo al aire.

1. ¿Cuál es el ángulo entre el haz incidente y el haz que finalmente emerge del agua?
2. Si la profundidad del agua en el acuario es de 15cm, ¿cuál es la distancia que separa al punto donde el haz penetra a la superficie del agua y el punto en el cuál emerge de ella?

Problema 2.

¿A qué altura desde la superficie de la Tierra hay que colocar un satélite para que éste se vea estacionario desde la Tierra?
Nota: Ésta es la condición que debe cumplir un satélite para intercomunicación desde la Tierra.

Problema 3.

Desde una altura de $5m$ se deja caer un objeto de $1kg$ de masa, el cual choca con un resorte, de constante $k = 50N/m$ y $1.5m$ de longitud, comprimiéndolo hasta quedar en reposo ¿Cuál es la compresión que recibe el resorte?

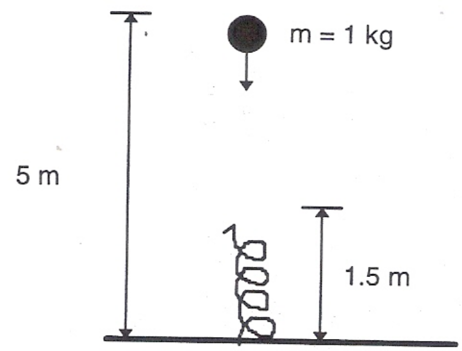


Figura 1

Problema 4.

Un anillo de $2\pi cm$ de radio está cargada uniformemente y gira en torno a un eje que pasa por un centro. Si la carga total en el anillo es $q = 1.0 \times 10^{-8}c$ y su rapidez angular es de 100 revoluciones por segundo, ¿Cuál es el campo magnético que genera en su centro?

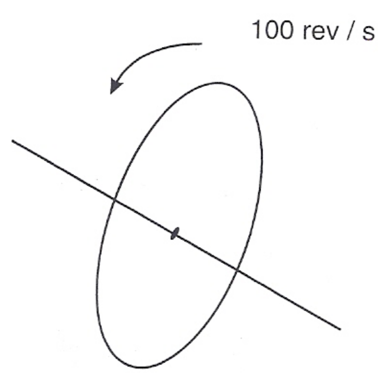


Figura 2

Problema 5.

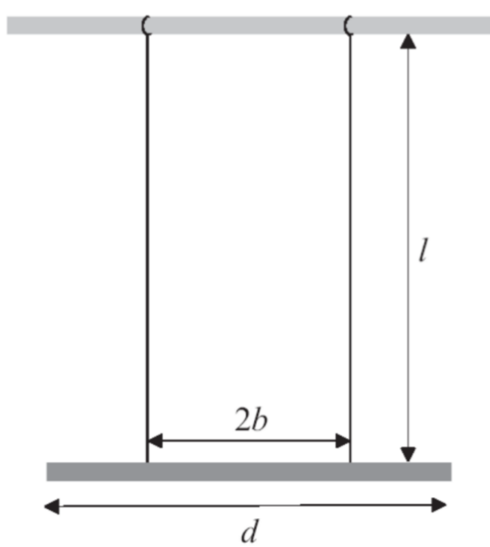
Sobre una mesa de plástico se encuentran alineadas tres barras metálicas en contacto. A cada extremo de la línea de barras se aproximan 2 objetos cargados positivamente, pero si tocarlos. A continuación se separan las barras, usando una varilla aislante y manteniendo cerca de los extremos los objetos cargados. Por último se alejan los objetos cargados.

1. ¿Qué tipo de carga eléctrica se encuentra al final en cada barra metálica?
2. Explica con claridad cómo es que las barras adquirieron carga eléctrica.

Olimpiada Nacional de Física 1997.
Puebla.
Examen Experimental.

Problema 1. Péndulo bifilar.

Un péndulo bifilar está constituido por una varilla suspendida horizontalmente por dos hilos paralelos de longitud l atados a un soporte rígido y atados a la barra a una distancia b equidistante del centro de masa.



Material:
Péndulo bifilar.
Cinta métrica o regla.
Cronómetro.
Cinta adhesiva.
Papel milimétrico.

Coloca cada una de los hilos en posiciones equidistante de los extremos de la barra deslizando los puntos de apoyo del soporte tal que los hilos se mantengan verticales siempre (la barra debe estar siempre horizontal). Para cada posición de los hilos, rota la barra a un ángulo inicial de 10° en torno al eje vertical que pasa por el centro de masa y suéltala. La barra oscilará en un plano horizontal en torno a su centro de masa. Ensaya esto varias veces de tal manera que el centro de masas quede en reposo.
Realiza un experimento de prueba, para determinar entre que largos y entre que distancias de separación vas a trabajar, para esto, mide el periodo para un θ pequeño y uno grande, repite para b pequeño y grande.

Primera parte:

1. Como el tiempo de reacción de una persona es aproximadamente 0.3 s ¿Qué error se está cometiendo al realizar esta medición? Por lo cual, ¿Qué se debe hacer para que tus datos tengan un error porcentual solo del 1 %?

2. Estudiar el periodo T de las oscilaciones en función de la distancia b. Presenta los resultados en forma de una tabla y/o un gráfico. Mide el período para unas diez distancias diferentes.

3. Estudiar la dependencia del periodo T de las oscilaciones en función de la longitud l del hilo, mostrar de nuevo los resultados en una gráfica. Mide el periodo para unas diez alturas diferentes.

4. Deduce una ley empírica donde T sea función de b y l, es decir $T = (l, b)$.

Segunda parte:

1. Esboza un diagrama de fuerzas que actúan en la barra cuando está rotada entorno a la vertical que pasa por el centro de masa un ángulo θ relativo a su posición de equilibrio.

2. Mostrar, considerando una aproximación de ángulos pequeños ($\sin\theta \simeq \theta, \cos\theta = 1$) que el movimiento oscilatorio de la barra obedece la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgb^2}{Il}\right)\theta = 0$$

   Donde M es la masa de la barra e I es el momento de inercia rotacional para una rotación en torno a un eje perpendicular a la barra que pase por el centro de masa.

3. A partir de la ecuación anterior, manteniendo una l constante, determinar el periodo de oscilación del péndulo mostrando que

$$T \times b = \text{Constante}$$

4. Verificar que los datos obtenidos cumplan la ley anterior y a partir de esto determinar el valor de la inercia rotacional I de la barra (considerar el valor de $g = 9.8$ m/s^2).

5. Comparar el resultado obtenido de I con el valor para el momento de inercia rotacional de una barra cilíndrica que gira en torno a un eje perpendicular al eje del cilindro y que pasa por el centro de masas,

$$I = \left(\frac{r^2}{4} + \frac{d^2}{12}\right)M$$

   Donde r es el radio de la sección circular de la barra.
   La densidad del aluminio es 2698 Kg/m^3.

6. Estima, haciendo un análisis, los errores en el cálculo de la inercia rotacional de cada método.

Olimpiada Nacional de Física 1997.
Puebla.
Examen Teórico.

Problema 1. Nitrógeno Molecular.

La temperatura de 5 Kg de gas de N_2 es elevada de 10° C a 130° C. Si el proceso se realiza a presión constante, ($c_p = 0.248$cal/g°K y $c_v = 0.177$cal/g°K).

1. Encuentra la cantidad Q de calor proporcionado al gas.
2. El incremento de energía interna Δu.
3. El trabajo externo W realizado por el gas
4. Calcule la cantidad Q de calor proporcionado al gas.

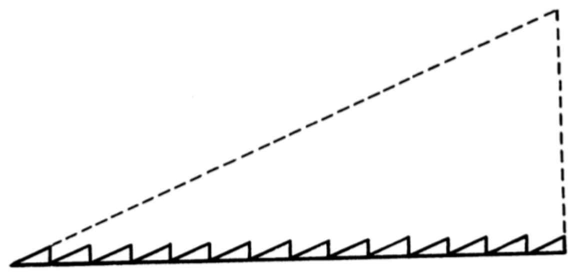
Problema 2. Condensadores de placas paralelas.

Un condensador consiste de dos placas paralelas separadas entre si por una capa de aire de 0.4 cm de espesor. El área de cada una de las placas es de 202 cm^2. ($\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$Coul^2/nt-m^2)

1. Calcule su capacitancia total si el condensador se conecta a una fuente de 500 volts.
2. Encuentre la carga q en cada placa.
3. Calcule la energía W almacenada en el condensador.
4. Calcule la intensidad de campo eléctrico E del aire entre las placas.
   Si una placa de mica de 0.4 de espesor y de constante dieléctrica 6 se inserta entre las placas
5. Calcule que cantidad de carga adicional almacenará el condensador.
6. Calcule la energía W almacenada en el condensador.

Problema 3. Prisma de Fresnel.

Cuando la luz incide sobre el ángulo recto sobre un prisma de Fresnel (ver figura). El haz se divide en dos rayos al ser refractados por las respectivas mitades del prisma. Estos dos haces interfieren ópticamente el uno con el otro. ¿Cuál será la distancia máxima L del prisma a la que aun se observará un patrón de interferencia? La distancia entre vértices del prisma es $S = 4$cm, el índice de refracción del vidrio es $n = 1.4$, y el ángulo del prisma $a = 0.001$.



Problema 4. Pozo profundo.

1. Un cuerpo cuyas dimensiones menos preciarse, se coloca dentro de una esfera homogénea de pared delgada.¿Qué valor tendrá la fuerza de atracción con la que actúa la esfera sobre el dicho cuerpo para cualquier posición del cuerpo en el interior de la esfera? (Utilice argumentos de simetría).

2. ¿Con que fuerza el centro de la tierra atrae a un cuerpo de masa m que se encuentra en un pozo profundo si la distancia del cuerpo al centro de la tierra es igual a r? La densidad de la tierra debe ser considerada como única en todos los puntos e igual a ρ.

3. ¿Con que aceleración un cuerpo de masa m caería en un pozo profundo si la densidad de la tierra cambiara como $\rho(r) = k/r$? Donde r es la distancia del objeto al centro de la tierra y k es una constante .

Olimpiada Nacional de Física 1998.
Durango, Durango.
Examen Experimental.

Problema 1.

Estudiar el tipo de vaciado del agua contenida en un recipiente al que se le a practicado un orificio en el fondo.

1. Como primer paso, has lo que sea necesario para poder utilizar el recipiente de plástico transparente como un instrumento para medir volúmenes (es decir, como un probeta).
2. Determina el tiempo que tarda en vaciarse el agua en cada uno de los recipientes (latas) con una perforación en su fondo, indicados claramente el procedimiento que seguiste y las cantidades que mantuviste constantes. Has un gráfico con tus resultados.
3. Selecciona una de las latas (la que consideres conveniente) y estudia el tiempo de vaciado como función de la cantidad de líquidos contenido en la lata. Has una gráfica con tus resultados.
4. Consideras necesario repetir medidas para hacer una estimación de errores. En caso afirmativo, indica cuales medidas repetiste y porque.
5. ¿Qué relación existe entre el tiempo de vaciado y la cantidad de líquido en lata?

Material suministrado

1.- Cinco latas con una perforación en el fondo
2.- Un recipiente transparente
3.- Un cronómetro
4.- Hojas de papel milimétrico
5.- Tiras de papel milimétrico
6.- Regla

Olimpiada Nacional de Física 1998.
Durango, Durango.
Examen Teórico.

Problema 1.

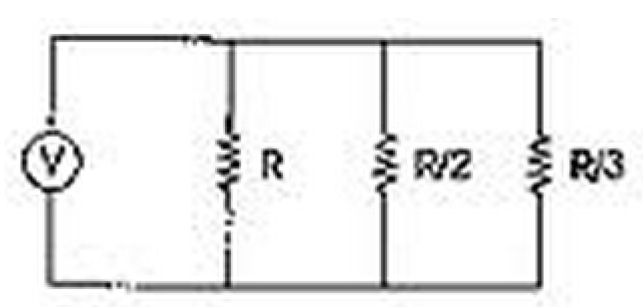
Un cuerpo de masa m , que viaja con una velocidad v, choca elásticamente con otro cuerpo idéntico que se encuentra en reposo. Se observa que después de la colisión el primer cuerpo viaja con una rapidez u en una dirección que forma un ángulo a respecto a su dirección inicial del movimiento. Demostrar que la dirección de movimiento del segundo cuerpo es perpendicular a la del primero, sin importar cual es el ángulo a.

Problema 2.

1. Cuando un cilindro uniforme de plástico, de $30cm$ de longitud , se coloca verticalmente en el agua, flota con $10cm$ fuera del agua. ¿Cuál es la densidad del cilindro?
2. Al sumergir verticalmente al mismo cilindro en otro liquido, flota con $14cm$ fuera del liquido. ¿Cuál es la densidad del liquido?

Problema 3.

Considere el circuito mostrado en la en la siguiente figura:



1. ¿Cuál es la corriente suministrada por la fuente de voltaje V?

2. ¿Cuál es la corriente que circula por cada uno de los resistores?

3. ¿Cuál es la caída de potencial en cada resistor?

4. ¿Cuál es la potencia disipada en cada resistor y cuál es la potencia entregada por la fuente V?

Problema 4.

Al colocar una lente entre un objeto luminoso y una pantalla separada por $1.25m$ del objeto, se encuentra que existen dos posiciones de la lente, separadas entre si por $0.75m$, que producen imágenes nítidas sobre la pantalla. ¿Cuál es la distancia focal de la lente?

Problema 5.

A un trozo de hielo, que se encuentra a -10°C, se le suministra calor con un ritmo temporal uniforme. Al hielo le toma $72s$ aumentar su temperatura a 0°C. A partir de eses momento , trascurre $1200s$ antes de que la temperatura empiece a aumentar nueva mente. ¿Cuál es el calor específico promedio del hielo? ¿Cuál será el ritmo de calentamiento subsecuente del agua?

Problema 6.

Debajo de un alambre de cobre, la brújula cambia su orientación apuntando ahora en la dirección Norte$-$Sur, se coloca una brújula a $20cm$ del alambre. Cuando se hace un circulo un corriente de $2.0A$ por el alambre de cobre, la brújula cambia su orientación apuntando ahora en la dirección N 20°W. ¿Cuál es la magnitud de campo magnético terrestre en este sitio? ¿En qué sentido circula la corriente sobre el alambre? ¿En qué sentido se mueven los electrones que generan la corriente eléctrica?

$Q_H = 3.33 \times 10^5 J/Kg$. (Calor latente de función del hielo)
$Q_A = 2.26 \times 10^6 J/Kg$. (Calor latente de vaporización del agua)
$C_A = 4.2 \times 10^3 J/Kg$°C (Calor específico del agua)
$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} F/m$ (Permisividad del vacio)
$\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} H/m$ (Permeabilidad del vacio)

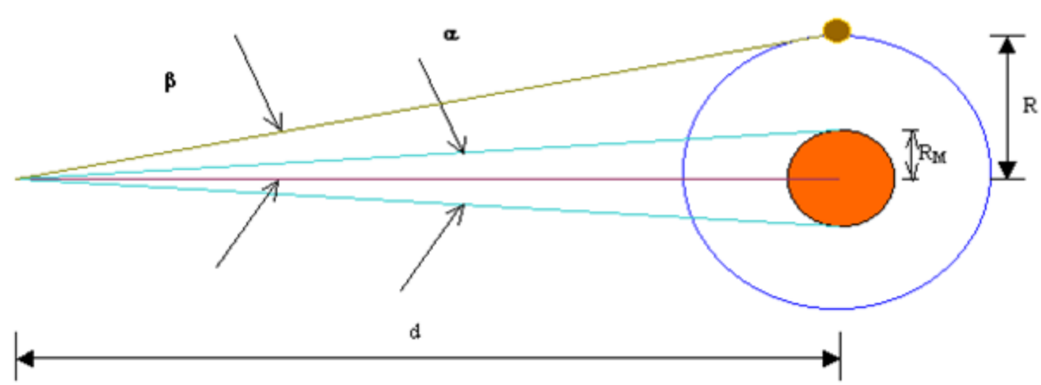
Olimpiada Nacional de Física 1999.
Hermosillo, Sonora.
Examen Teórico.

Problema 1. Un péndulo en Marte.

Un péndulo tiene un periodo de oscilación de 10 segundos sobre la superficie de la tierra. Este mismo péndulo es llevado a la superficie del planeta Marte. El objeto del problema es encontrar cuál será su nuevo periodo de oscilación. Lo siguiente le será de utilidad:

- Cuando la tierra se halla a una distancia de $d = 5.56 \times 10^10$ m de Marte, se observa que el planeta tiene un diámetro angular $\alpha = 25''.1$
- Se observa además que la distancia angular máxima entre el centro de Marte y su satélite Fobos es de $\beta = 34''.5$ y su período de revolución alrededor de Marte es de $T = 2.76 \times 10^4$ s.
- Considere la órbita de Fobos circular. $G = 6.67 \times 10^11$ Nm^{2}Kg^{-2}.

Recuerde que $1'' = 3.14/(180 * 60 * 60)\text{rad} = 4.9 \times 10^{-6}$ rad.



Problema 2. Aterrizaje suave.

Un recipiente contiene dos líquidos que se mezclan y forman dos capas de alturas a_1 y a_2. Sus densidades son p_1 y p_2 respectivamente. Un objeto pequeño y de perfil hidrodinámico, es soltado sobre la superficie de la capa superior. El objeto cae y llega al fondo del recipiente en el preciso momento en que su velocidad es cero. ¿Cuál será la densidad del objeto? Suponga que la viscosidad de los líquidos es despreciable y que el objeto al tener perfil hidrodinámico no presente resistencia la moverse.

AYUDA: La energía potencial del objeto se disipa completamente al llegar al fondo con velocidad cero. El trabajo de resistencia solo la realizan las fuerzas de flotación.

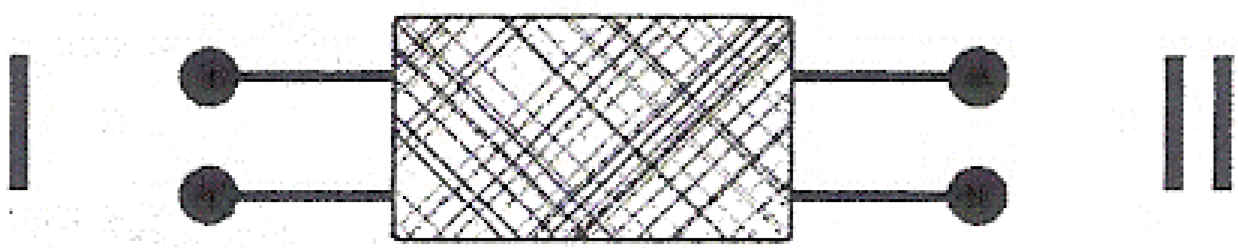
Problema 3. Partícula en un campo.

Una partícula de carga q y masa m se mueve por el punto A con una velocidad V_0 y un ángulo α con respecto a la dirección de un campo magnético uniforme de magnitud $\mathbf{B}$. Si queremos que la partícula pase justamente por el punto C. ¿Qué valor o valores deberá tener el campo $\mathbf{B}$? El punto C se halla a una distancia d del punto A.

Olimpiada Nacional de Física 2000.
Guadalajara, Jalisco.
Examen Teórico.

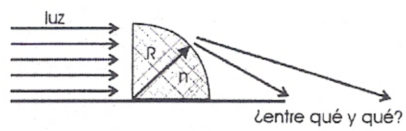
Problema 1.

Se tiene una caja negra con cuatro terminales. Se conecta una batería de V voltios al lado I de la caja y un voltímetro conectado al lado II marca $V/2$ voltios. Ahora se conecta la misma batería al lado II y el voltímetro marca V voltios. Si sólo puede haber dentro de la caja negra inductores, o condensadores o resistencias o combinaciones de todos, dibuje un esquema del circuito que haya en el anterior.



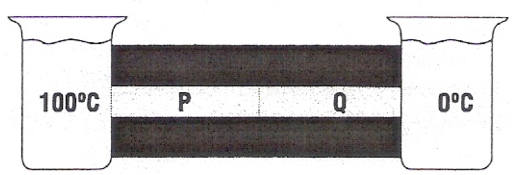
Problema 2.

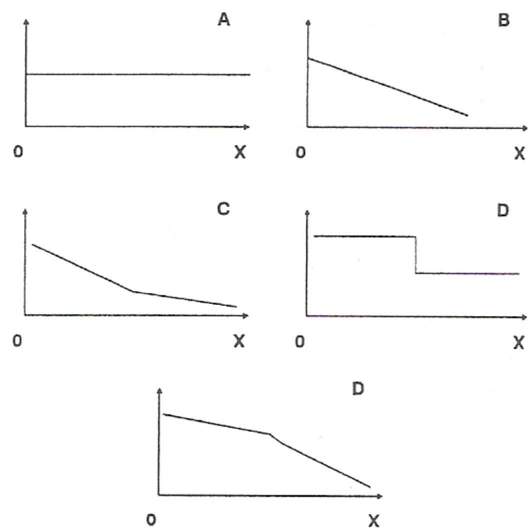
Una pieza de vidrio cuya forma es de 1/4 de cilindro y con un índice de refracción $n = 1.5$ y un radio $R = 5cm$, descansa sobre una mesa horizontal. Su superficie plana vertical es iluminada por un haz luminoso horizontal y uniforme. Sobre la mesa, a la derecha del cilindro, aparece la mancha de la luz difractada por el cuarto del cilindro.
¿Entre qué punto y qué punto medio del extremo derecho del cilindro, aparece la mancha de luz?
Ayuda, El punto más alejado puede ser determinado con la formula de los lentes.



Problema 3.

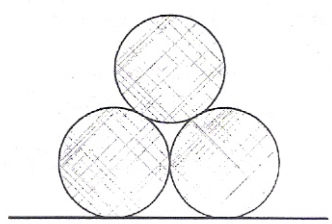
Un conductor está constituido por dos barras metálicas P y Q unidas por sus extremos. Los dos extremos libres están mantenidos a una temperatura de 0°C y 100°C, mientras que las superficies laterales de los conductores se mantiene aisladas térmicamente.
Las gráficas ilustran en la ordenada el flujo de calor en función de la posición a lo largo de la barra, en una situación en donde la conductividad térmica de P es mayor que la de Q. ¿Cuál de todas las gráficas representaría mejor el flujo de calor a lo largo de la barra, en condición estacionaria? (Dibújela nuevamente)





Problema 4.

Tres cilindros idénticos están colocados como se muestra en la figura. El coeficiente de fricción entre los cilindros es:μ_1 y entre los cilindros y el piso es μ_2. Encontrar la condición que deben satisfacer μ_1 y μ_2 para que el sistema permanezca en equilibrio.



Olimpiada Nacional de Física 2001.
Ensenada, Baja California.
Examen Experimental.

Lista de materiales:

1. Vaso de stereofoam o una lata sin tapa.
2. Globo.
3. Tramo de manguera transparente de plástico.
4. Regla.
5. Cinta adhesiva.
6. Recipiente con agua.
7. Embudo.
8. Varias piedras.

Objetivo:
Construir una balanza hidrostática con los materiales proporcionados.

Reporte:
El reporte del experimento debe incluir las siguiente partes:

1. Descripción en detalle de la construcción de la balanza.
2. Presentación de los conceptos físicos utilizados en el funcionamiento de la balanza.
3. Determinación relativa de los pesos de las piedras con respecto a la piedra más ligera.
4. Determinación absoluta de los pesos de las piedras.
5. Propuesta de algún procedimiento que permitiría, en principio, la calibración de la balanza.
6. Propuesta para tratar con las fuentes posibles de error a fin de mejorar el funcionamiento de la balanza.
7. Conclusiones.

Olimpiada Nacional de Física 2001.
Ensenada, Baja California.
Examen Teórico.

Problema 1. Misión Espacial.

Supongamos que eres comandante de una pequeña sonda espacial que se encuentra girando uniformemente en órbita circular en torno a uno de los grandes planetas, completando una revolución en $\simeq 3$ Hrs. Se sabe que el diámetro del planeta es de unos 140,000 Km y la altura de la sonda sobre la superficie es de sólo unos cuantos kilómetros. Puedes considerar que $G = 7 \times 10^{-11}$ N m^2 Kg^{-2} y $\pi = 3.14$.
Desde la Tierra te piden estimar:

- La gravedad en la superficie del planeta
- La masa del planeta.

Para cumplir tu misión puedes comenzar por calcular la velocidad de la sonda.

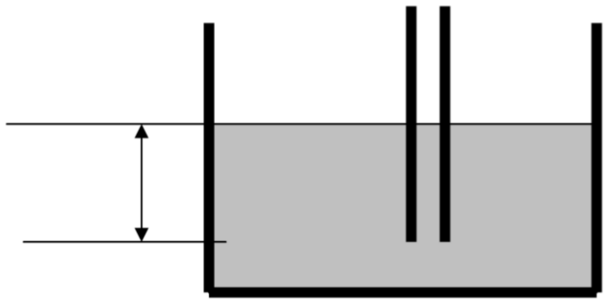
Problema 2. Pipeta de Mercurio.

Un tubo cilíndrico de vidrio de longitud L está sumergido la mitad de su longitud en mercurio, como se ilustra en la figura. Se tapa con el dedo el orificio superior y se levanta lentamente el tubo. Parte del mercurio se escurre, pero queda una columna de mercurio de longitud y en el tubo. Suponga que el aire encerrado en el tubo se puede considerar como un gas ideal.

1. Muestre que la presión del aire encerrado en el tubo se relaciona con la presión atmosférica inicial, según la expresión:

$$p = p_{atm} \frac{L}{2(l-y)}$$

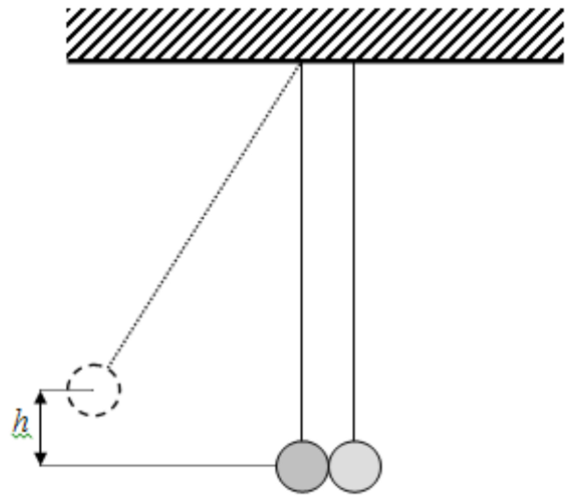
2. Si la presión atmosférica equivale a una longitud H de una columna de mercurio , calcule la longitud y de la columna de mercurio en términos de H y L.



Problema 3. Colisiones.

Como se muestra en la figura, el péndulo de la izquierda se eleva a una altura h. Posteriormente se libera y colisiona con el péndulo de la derecha que permanecía en reposo. Suponga inicialmente que ambas masas son idénticas

- ¿Cuál es la velocidad de la esfera de la izquierda, precisamente antes de la colisión?
- Si después de la colisión ambas esferas permanecen pegadas, ¿hasta qué altura h' (en términos de h) oscilará el sistema conjunto?
- Suponga que ambas esferas son desplazadas a una altura h, una hacia la izquierda y la otra hacia la derecha, y que después ambas esferas son liberadas desde el reposo simultáneamente colisionando elásticamente. ¿A qué altura ascenderá cada esfera después de la colisión? Explique su respuesta.
- Ahora suponga que las esferas tienen diferente masa. Siendo m_1 la masa de la esfera izquierda y m_2 es la masa de la derecha. Al soltar m_1 de la altura h y colisionar con m_2 inicialmente en reposo, éstas permanecen juntas de manera que el sistema alcanza una altura de $h/3$. Determine la masa m_2 en términos de m_1
- Si ahora $m_1 = 3m_2$ y m_1 se suelta de la altura h mientras m_2 esta en reposo. Calcule las velocidades finales después de la colisión asumiendo un choque elástico. Exprese su resultado en función de la velocidad inicial (v_0) de la masa m_1 justo antes de la colisión.



Problema 4. Movimiento de partículas cargadas.

Un electrón es lanzado desde una de las placas de un condensador de placas paralelas (ver figura 1), su rapidez inicial es $v_0 = 6.0 \times 10^6$ m/s. Un campo eléctrico dirigido de la placa 1 a la placa 2, lo desvía a una trayectoria parabólica. La magnitud del campo eléctrico es $E = 20000$ N/C, la longitud de la placas es de $L = 11.0$ cm y la separación d entre ellas es de 2.0 cm.
($m_e = 9.11 \times 10^{-31}$Kg y $q_e = -1.6 \times 10^{-19}$C)

1. Si $\theta = 40^\circ$ ¿Alcanzará el electrón a golpear la placa 2?

2. ¿Cuál debe ser el ángulo de lanzamiento del electrón de manera que evite golpear la placa 2 y logre un alcance máximo?

3. ¿Puede un electrón salir por la derecha del condensador, evitando el contacto con las dos placas? Justifique su respuesta.

4. Si se quita el campo eléctrico y se aplica un campo magnético B perpendicular a v_0 la partícula será desviada en una trayectoria circular como se ilustra en la figura 2. El campo magnético es uniforme y se aplica en toda la región marcada con cruces en la figura. ¿Cuál debe ser el valor mínimo de B para evitar que un electrón lanzado a un ángulo de 90° golpee la placa 2?

5. Si en lugar de un electrón se lanzara una partícula de mayor masa, digamos, un protón ¿Cuál sería el B mínimo que evite la colisión con la placa 2, y en que dirección debe aplicarse este campo para desviar el protón hacia la derecha?
   ($m_p = 1.67 \times 10^{-27}$Kg y $q_p = 1.6 \times 10^{-19}$C)
   La dinámica de las partículas cargadas es importante en el diseño de aparatos como el Selector de Velocidades y el Espectrómetro de Masas, un instrumento que permite separar los iones moleculares de acuerdo con su relación carga–masa.

Figura 1

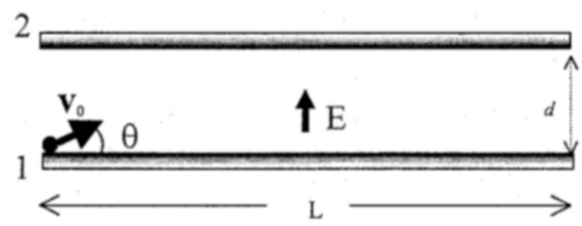
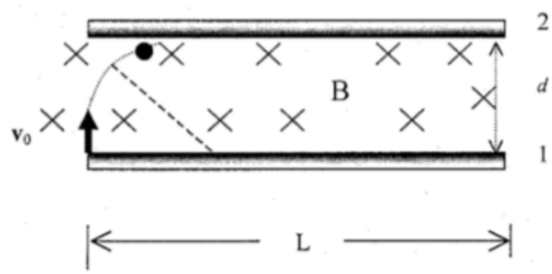


Figura 2



Problema 5. Efecto Doppler

Una exploradora está perdida en un bosque escucha a lo lejos el sonido agudísimo de un tren. De inmediato saca un instrumento con el que mide la frecuencia de la onda sonora emitida por el tren. El resultado se muestra en la gráfica. Ayude a la exploradora a determinar:

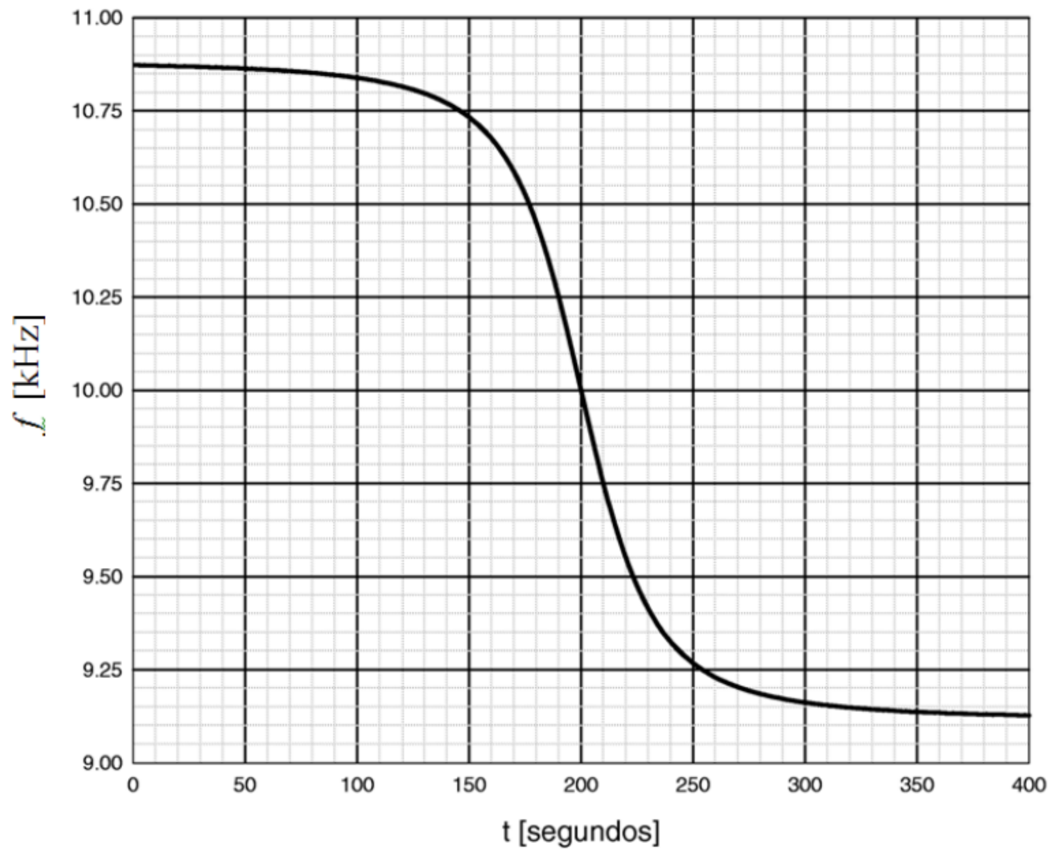
a) Si se trata del tren rápido. (viaja a más de 90 Km/h).

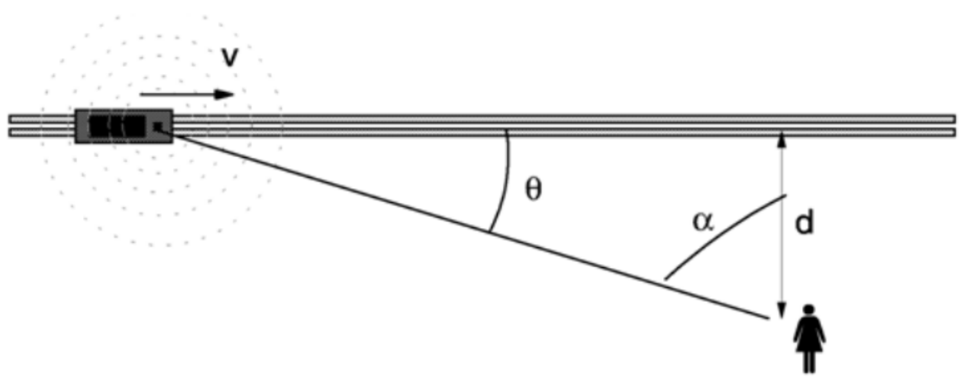
b) A qué distancia se encuentra ella de la vía.

Puedes suponer que la velocidad del sonido en el aire es $v_s = 333.3$ m/s y aproximar la frecuencia Doppler mediante la expresión

$$y = v_0(1 + v_{t0}/v_s)$$

donde v_0 es la frecuencia de la onda y v_{t0} es la componente de la velocidad de la fuente en la dirección del observador, tomada como positiva cuando la fuente se acerca al observador y negativa cuando ésta se aleja.





El efecto Doppler es de gran utilidad en Astronomía, por ejemplo, se utiliza para calcular la velocidad angular de las estrellas y el desplazamiento al rojo de las galaxias. Con el radar en la Aviación Civil permite conocer la velocidad y posición de las aeronaves.

Olimpiada Nacional de Física 2002.
Morelia, Michoacan
Examen Teórico.

1. Hielo y agua

En un día de verano dejas sobre la mesa de trabajo un vaso con agua y hielo mientras atiendes una llamada telefónica. Cuando regresas a la mesa el hielo se ha fundido y observas con sorpresa que el nivel del agua en el vaso:

(a). Ha aumentado

(b). Se mantiene igual

(c). Ha disminuido

Identifica los principios físicos involucrados en el proceso y represéntalos simbólicamente. Muestra que tu opción elegida se deduce de estos principios.(15 puntos)

2. Estimación de R

Considera los siguientes datos de presión y densidad del vapor de agua a 100 grados Celsius y a partir de ellos realiza una estimación de la constante universal de los gases R en unidades de $J/molK$. Enuncia claramente las hipótesis asumidas en esta estimación (15 puntos).

Presión(Pa) 986	9806	98066
Densidad(Kg/m^3) 0.00570	0.0575	0.578

3. Física Vs Fuerza Bruta

Asistes con tus compañeros de escuela a la función inaugural de un gran circo de tradición. En el número más impresionante, Strongman se tiende en el suelo con una gruesa placa de acero sobre el pecho e invita a una persona del público para que golpeé la placa con un marro de metal, poniendo con ello toda su energía.

Strongman sale del trance con sus costillas intactas y tú, todavía con el recuerdo del chocar de los metales, te preguntas como es posible esto.

Asume que la masa de la placa es aproximadamente nueve veces la masa del marro para calcular qué fracción de la energía cinética del mismo es transferida a la placa después de ser golpeada. Elabora tu explicación con estos datos. (25 puntos)

4. Pasando carga

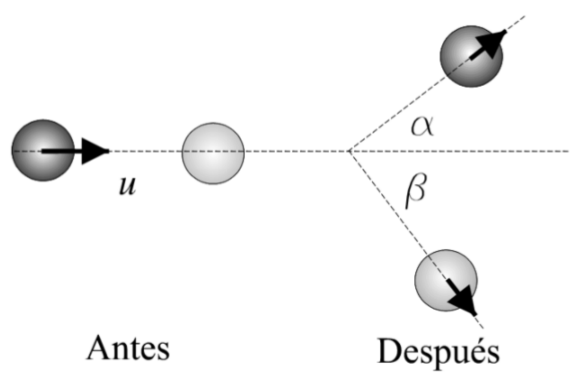
Un explorador tiene dos lámparas idénticas que funcionan cada una con una pila seca. La pila 1 es nueva y lleva los siguientes datos 6 Volts 5 Ampere-hora y la otra pila está descargada. Entonces él piensa que si la carga se conserva, bien podria dividirse la carga total a partes iguales para tener dos lámparas en servicio. Considerando lo anterior procede a conectar las pilas para transferir carga. Evalúa la estrategia del explorador después de completar la siguiente tabla. (25 puntos)

	Carga	Voltaje
Energía	Carga	Voltaje
Energía		
Inicio		6V
	0	0
0		
Final		

Olimpiada Nacional de Física 2003.
Cd. Juárez, Chihuahua.
Examen Teórico.

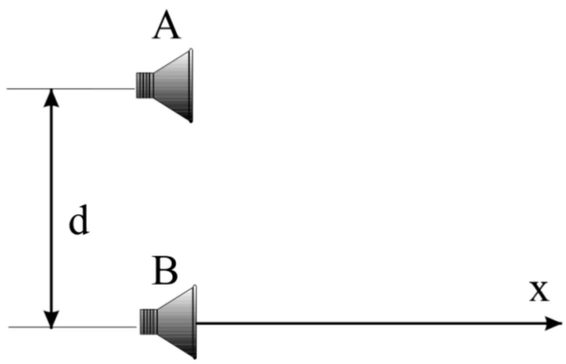
Problema 1.

Un conocimiento adquirido por experiencia, entre los jugadores de billar es el de que una vez que una bola en movimiento golpea de lado a otra bola estacionaria, el ángulo entre sus trayectorias divergentes es de $\alpha + \beta = 90°$.
Demuestre que esta regla es una consecuencia de la conservación del momento lineal y de la conservación de la energía.
Nota: En la práctica esto no se cumple exactamente, pues el proceso está sujeto a energía rotacional de las bolas.



Problema 2.

Dos altoparlantes A y B están colocados como muestra la figura a una distancia $d = 4$m el uno del otro y emiten en fase una onda sonora de longitud de onda $\lambda = 1$m. Si nos colocamos sobre la recta X notaremos algunos mínimos. Determine cuántos y en que posiciones sobre la recta X se hallan éstos, tomando como origen la bocina B.



Problema 3.

En los extremos de un resorte conductor de masa despreciable , longitud l_0 y constante elástica k, se fijan dos esferas metálicas de masa m y radio $r << l_0$. La capacidad para retener carga eléctrica en el resorte es despreciable en comparación a la de las dos esferas. Cuando se transfiere una carga Q al sistema y éste se coloca sobre un plano horizontal sin fricción, las dos esferas comienzan a oscilar.
Determine la elongación máxima del resorte.

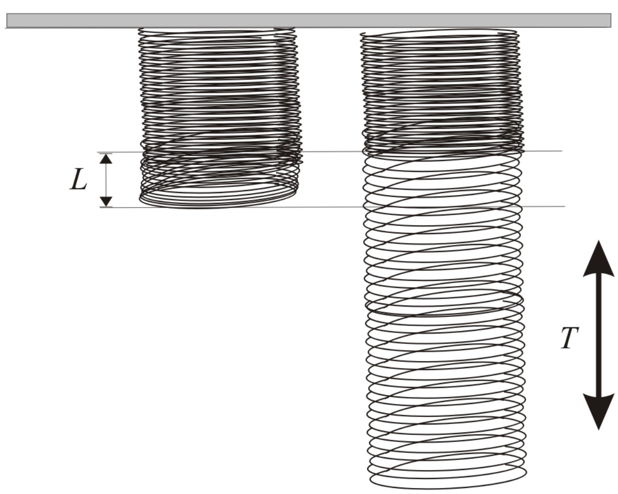
Olimpiada Nacional de Física 2004.
Zacatecas, Zacatecas.
Examen Experimental.

El Gusano Chino.

Material: Gusano, cronómetro, cinta adhesiva y papel milimetrado.

El período de oscilación T de un objeto de masa m colgando de un resorte-cuya con masa es despreciable y es proporcional $a\sqrt{m/k}$, donde k es la constante del resorte. Generalmente la masa del resorte se desprecia porque el objeto que se cuelga es más masivo que la propia masa del resorte. Pero ¿qué pasa si el resorte no tiene objeto colgado alguno?

Existe cierto tipo de juguete que consiste simplemente en un resorte muy ligero, que si lo dejamos colgar de la mano, se estirará y comenzará a oscilar. La figura muestra el juguete. Resulta evidente que el período de oscilación depende del tramo L del resorte que dejemos oscilar. Mientras más corto sea este, más rápido oscilará. (20 pts en total)

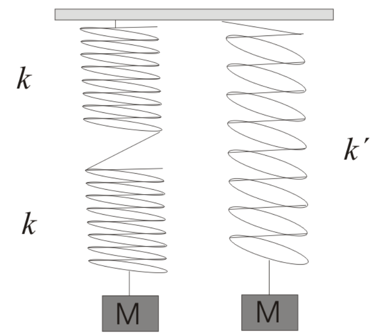


La pregunta es la siguiente:

1. (8 pts) Investigue cuál es la relación entre la longitud L del resorte y su período de oscilación. Calcule errores. Obtenga de su experimento una gráfica y ajuste su gráfica.

2. (5 pts) De su experimento, investigue cuál es la posible relación entre L y T.

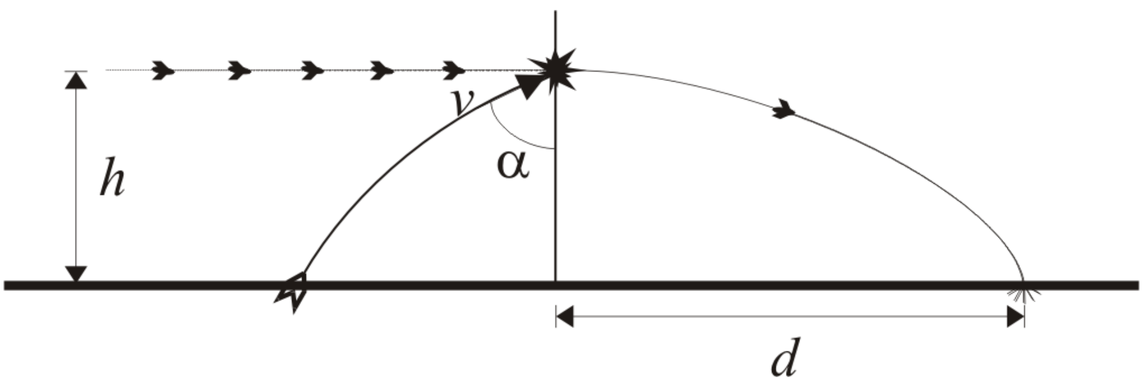
3. (7 pts) De una explicación teórica de lo observado. Comience considerando como debe variar teóricamente la masa m del resorte al variar L. Después piense como debe variar la constante del resorte k al variar L. Para este último caso considere un par de resortes de constante k unidos por sus extremos con una masa M colgada a uno de sus extremos libres y deduzca cuál debe ser la nueva constante k' de un resorte que sustituya al par. Compare cualitativamente su modelo con sus resultados experimentales.



Olimpiada Nacional de Física 2004.
Zacatecas, Zacatecas.
Examen Teórico.

Problema 1.

(Vale10 pts. en total) Un cazador incrusta un dardo de masa m en un pájaro que vuela en línea recta horizontal a una altura h sobre el suelo. Sabemos que el dardo incide detrás del ave con una velocidad v a un ángulo α con la vertical. El pájaro cae al suelo un tiempo t después de ser golpeado a una distancia d adelante del punto donde fue golpeado. Los datos del problema son m, h, v, d,α.

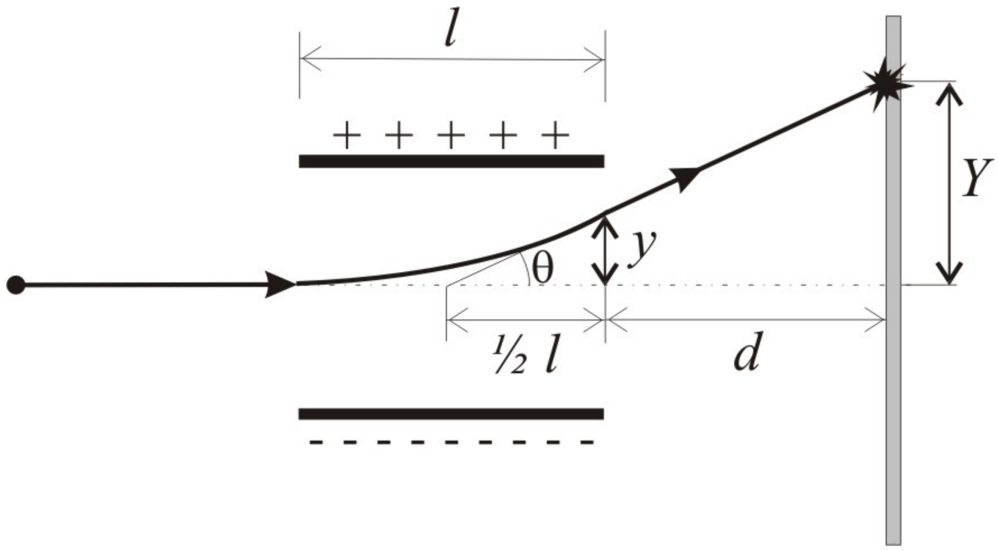


1. Obtenga la masa M del pájaro. (7 pts.)
2. Obtenga la rapidez a la que el pájaro volaba antes de ser golpeado por el dardo. (3 pts.)

Problema 2.

(Vale10 pts en total) Un electrón de masa m y carga e^- es lanzado con una velocidad v a lo largo de una trayectoria horizontal justo a la mitad de dos placas paralelas también horizontales, cada una de longitud l como lo muestra la figura. La intensidad del campo eléctrico es E y el campo apunta hacia abajo. Una pantalla fluorescente se coloca a una distancia d de las placas. Obtenga las fórmulas para.

1. (4 pts) El desplazamiento vertical y del electrón justo cuando abandona las placas deflectoras.

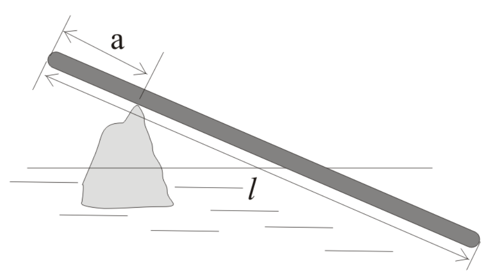


2. (3 pts) El ángulo θ que hace la trayectoria del electrón con el eje horizontal después de abandonar las placas.

3. (3 pts) La distancia vertical Y del eje al punto donde el electrón golpea la pantalla.

Problema 3.

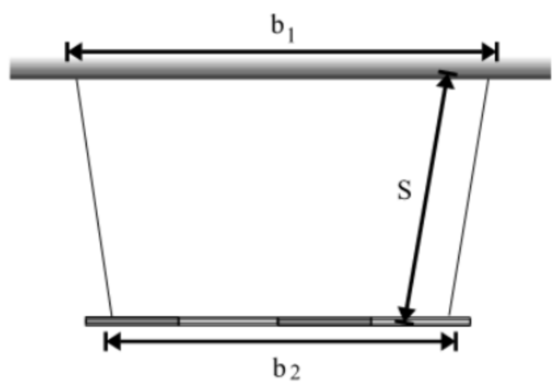
(Vale10pts en total) Una tabla de madera que tiene uno de sus extremos fuera del agua se apoya en una piedra que a su vez sobresale del agua. La tabla tiene una longitud l. Una parte de la tabla de longitud a se encuentra sobre el punto de apoyo (ver figura). ¿Qué parte de la tabla está hundida si el peso específico de la madera es d y el del agua d_0?



Olimpiada Nacional de Física 2007.
Tuxtla Gutierrez, Chiapas.
Examen Experimental.

Determinación experimental del momento de inercia de una barra delgada y homogénea por el método del péndulo bifilar.

El péndulo bifilar se muestra en la figura. Consiste de una barra que pende de dos hilos atados a ella y separados por una distancia b_2. Los hilos, de longitud S, están colgados del borde de una silla o mesa o cualquier objeto con un borde horizontal. En los extremos de los hilos se encuentra atado una barra formada por: uno, dos, tres o cuatro lápices bicolores unidos por sus extremos con cinta adhesiva. Los hilos cuelgan formando el mismo ángulo con la horizontal. La barra oscila en un plano horizontal, por lo que con objeto de mantenerlo en ese plano, las oscilaciones del péndulo deberán ser de poca amplitud.



Además de cuatro bicolores, cinta adhesiva e hilo usted cuenta con un cronómetro y una regla graduada en milímetros.

El propósito principal del experimento es determinar experimentalmente los momentos de inercia de una barra delgada para cuatro diferentes longitudes.
El momento de inercia I para un péndulo bifilar de masa M está dado por:

$$I = k^2 M$$

Donde k se conoce como el radio de giro del sistema y se puede calcular por,

$$k^2 = \frac{gT^2}{16\pi^2} \frac{b_1 b_2}{\left[S^2 - (b_1 - b_2)^2\right]^{1/2}}$$

Esta expresión puede simplificarse si se escoge $b_1 = b_2$.

Las cantidades de esta expresión se muestran en la figura y son: b_1 la distancia entre los dos hilos que cuelgan, b_2 es la distancia entre los dos puntos de donde esta sujeta la barra, S es la longitud de cada uno de los hilos, $g = 9.8\text{m/s}^2$, $\pi = 3.1416$ y T es el período de oscilación. El peso del bicolor es de 4.5 gm .

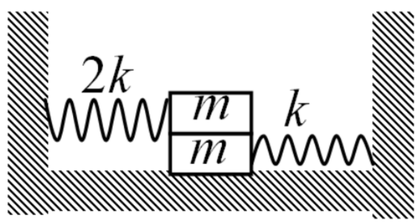
Tareas:

- Encuentre experimentalmente el momento de inercia para cuatro barras delgadas de distinta longitud. **No es necesario calcular errores.** Haga una tabla o tablas mostrando sus mediciones
- Considere que la barra tiene una longitud igual a $2a$. Haga una gráfica utilizando el valor de la mitad de la longitud de la barra (es decir "a") versus el momento de inercia I. (Nota "a" es en realidad la distancia del eje de giro al extremo de la barra.)
- Calcule el valor de I/M para cada una de sus mediciones.
- Grafique la mitad de la longitud de las barras (es decir los valores de a) versus los valores de I/M correspondientes.
- De la gráfica anterior deduzca como se relacionan I/M en función de la mitad de la longitud de la barra.

Olimpiada Nacional de Física 2007.
Tuxtla Gutierrez, Chiapas.
Examen Teórico.

Problema 1.

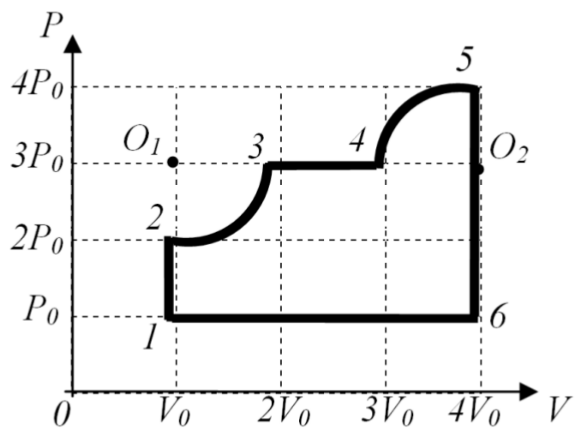
El propósito de este problema es determinar la amplitud de las oscilaciones armónicas de dos cuerpos unidos con dos resortes de masas despreciables (ver figura). La constante elástica del resorte derecho es $k = 10$ N/m, la del izquierdo es dos veces mayor, la masa de cada bloque es de $m = 10$ gr y el coeficiente de rozamiento entre los bloques es de $\mu = 0.5$. El rozamiento entre la base y el bloque inferior es despreciable. Los dos bloques oscilan unidos. En la posición de equilibrio el resorte derecho está deformado en 2 cm.



- En la posición de equilibrio ¿Cuánto estará deformado el resorte izquierdo?
- Encuentre la aceleración de los dos bloques unidos en función de m, de k y x, donde x es la posición medida desde la posición de equilibrio.
- Para que el bloque superior se mueva con aceleración a, ¿Qué condición debe cumplir la fuerza de rozamiento F_r?
- ¿Cuál es el valor de la amplitud de oscilación máxima del conjuntos ambos bloques sin que estos se separen? Proporcione el valor en centímetros.

Problema 2.

La idea de este problema es la de determinar el rendimiento del ciclo mostrado en el la figura. Los tramos 2-3 y 4-5 son circunferencias con centros en O_1 y O_2 respectivamente.



Recuerda que se define el rendimiento de una máquina térmica que funciona entre un foco frío Q^- y uno caliente Q^+, como

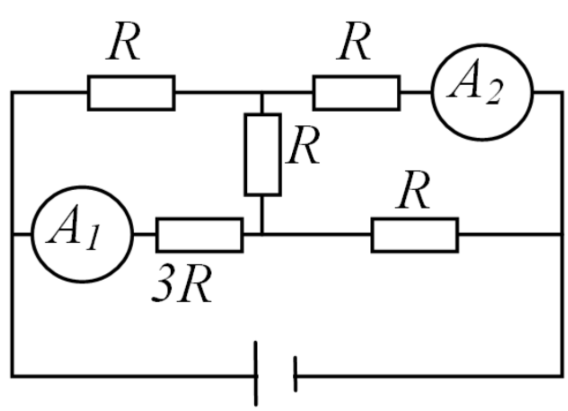
$$\eta = \frac{\| W \|}{Q^+}$$

donde W es el trabajo proporcionado por la máquina cx.

- Expresa el rendimiento en función Q^- y W, recuerde que $Q^+ - \| Q^- \| = W$
- ¿En que tramos se sede calor Q^-? (1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6 ó 6-1).
- Calcula la suma del calor total cedido en esos tramos.
- Calcula el trabajo W.
- Calcula la eficiencia .

Problema 3.

En el esquema de la figura, el amperímetro A_1 muestra la corriente I_1



- ¿Qué corriente eléctrica marca el amperímetro A_2? Los dos equipos son ideales y los datos dados en la figura son conocidos en el problema.

Problema 4.

En un recipiente cilíndrico con área en la base $S = 100$ cm^2 se vertió 1 litro de agua salada con densidad $\rho_1 = 1.15$ gr/cm^3, y se coloco un pedazo de hielo de agua dulce. La masa del hielo es $m = 1$ Kg. Determina cuánto cambiará el nivel del agua en el recipiente si se derrite la mitad del hielo. Considere que con la disolución de la sal en el agua no cambia el volumen del líquido.

Pregunta:

1. Si inicialmente (es decir antes de derretirse) la masa del hielo es m. ¿Cuál será el volumen V_1 de agua que el hielo desplaza? Considere que ρ_1 es la densidad inicial del agua salada.

2. Después de que se derrite la mitad de la masa de hielo $m/2$, se deposita un volumen de agua derretida V_2 en el recipiente cilíndrico. El agua derretida es agua pura de densidad ρ y se combina con el agua salada y esta combinación hace que la densidad cambie. Sea ρ_2 la densidad final del agua. ¿Cuál será el volumen V_2 de agua que desplaza el pedazo de hielo que queda al derretirse la mitad de la masa del hielo? Exprese su respuesta en términos de ρ_2 la densidad final del agua.

3. Cuál será el volumen V' de agua pura que se agrega al agua salada? Exprese su respuesta en términos de ρ la densidad del agua pura.

4. ¿Cuál fue la variación $\Delta V = V_2 + V`-V_1$ en el volumen del agua, en términos de las densidades?

5. ¿Cuál es el cambio de altura Δh del nivel del agua en el recipiente?

6. Obtenga una expresión para ρ_2 la densidad final del agua.

7. Evalúe numéricamente la expresión para ρ_2.

8. Evalúe numéricamente la expresión del inciso 5) para el cambio de altura Δh del nivel del agua en el recipiente.

Olimpiada Nacional de Física 2008.
Altamira, Tamaulipas.
Examen Experimental.

Instrucciones

1. No escriba su nombre en el examen ni en las hojas de examen, si lo hace será descalificado.
2. Escriba por un solo lado de las hojas usando el lápiz que se le proporcione.
3. Identifique en la parte superior izquierda su respuesta de la siguiente manera Problema No / Hoja / total de hojas. Ejemplo P4/2/3 significa que se trata de la hoja dos del un total de tres hojas del problema cuatro.
4. Lea cuidadosamente todos los problemas. Si tiene alguna duda sobre la redacción debe escribir su duda en una hoja de papel y entregue la duda a los cuidadores del examen. Ellos harán llegar su pregunta al comité y si este cree pertinente comentara su respuesta a todos los concursantes.
5. Al terminar el examen entregue ordenado su examen a la mesa y retirese.
6. Entregue todo el equipo experimental que usó. Si no lo hace quedará eliminado

RECUERDE NO ESCRIBA SU NOMBRE EN LAS HOJAS DE RESPUESTA.

Material

Plano inclinado que puede Ud. de variar su inclinación si lo requiere.
Cronómetro
Regla
Papel milimetrado
2 ángulos de aluminio
Imán cilíndrico.
Transportador
Cinta adhesiva

Problema 1.

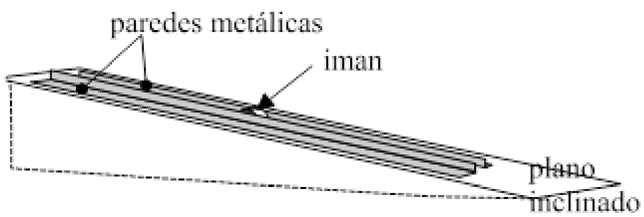
Frenado Magnético en un plano inclinado

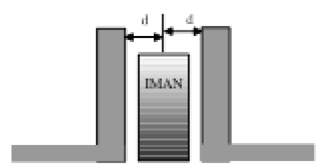
En este problema investigaremos el Frenado magnético. El experimento consiste en que un imán cilíndrico al girar cuesta abajo sobre un plano inclinado entre dos paredes paralelas de un material conductor, genera corrientes eléctricas en los dos conductores vecinos. Estas corrientes inducidas a su vez generan otro campo magnético que se opone al movimiento del cilindro. Es decir se genera una fuerza de frenado.

En este caso, la fuerza de frenado F depende de dos parámetros, la velocidad V del centro del cilindro en el plano inclinado y la distancia d del centro del imán alguna de las dos placas metálicas (el imán debe rodar equidistante a ambas paredes), esto se puede escribir así

$$f = kV^n d^p \tag{1}$$

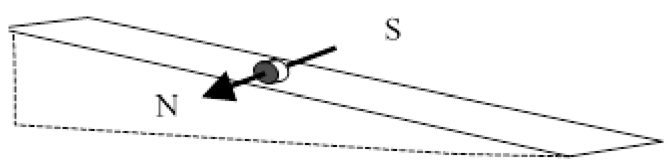
Donde k es una constante, n y p son dos exponentes. Ambos exponentes se tienen que determinar en este experimento. El esquema del dispositivo se muestra a continuación,





Ayudas:

1. Antes de iniciar cualquier experimento cerciórese de que el campo magnético terrestre no producirá ninguna torca sobre el cilindro. Para esto se le sugiere alinear el eje del imán con el campo magnético terrestre, ver figura.



2. El imán alcanza su velocidad terminal rápidamente, en otras palabras a muy corta distancia después de comenzar a rodar por el plano.

Tareas

1. Determinar el exponente p (10 puntos)

2. Determine el valor de el exponente n (10 puntos)
3. Haga una estimación aproximada del error experimental.

Nota: se calificaran tablas y gráficas y resultados

Olimpiada Nacional de Física 2008.
Altamira, Tamaulipas.
Examen Teórico.

Instrucciones

1. No escriba su nombre en el examen ni en las hojas de examen, si lo hace será descalificado.

2. Escriba por un solo lado de las hojas usando el lápiz que se le proporcione.

3. Identifique en la parte superior izquierda su respuesta de la siguiente manera Problema No / Hoja / total de hojas. Ejemplo P4/2/3 significa que se trata de la hoja dos del un total de tres hojas del problema cuatro.

4. Lea cuidadosamente todos los problemas. Si tiene alguna duda sobre la redacción debe escribir su duda en una hoja de papel y entregue la duda a los cuidadores del examen. Ellos harán llegar su pregunta al comité y si este cree pertinente comentara su respuesta a todos los concursantes.

5. Al terminar el examen entregue ordenado su examen a la mesa y retirese.

6. El EXAMEN TEORICO TIENE UN VALOR TOTAL DE 30 PUNTOS

7. Escriba sus repuestas en la hoja de respuestas. Si no hay espacio para su respuesta en el casillero de respuestas Escriba “NO HAY ESPACIO” e indique donde encontrar su respuesta usando la convención siguiente

Respuesta al inciso /Problema No/ Hoja/ Y enmárquela en un cuadro.
RECUERDE, NO ESCRIBA SU NOMBRE EN LAS HOJAS DE RESPUESTA.

Preguntas

Problema 1. Hoyos negros ”clásicos”

La primera propuesta sobre la existencia de hoyos negros fue hecha en 1783 por John Michell. La propuesta surgió lógicamente de suponer como verdadera, a la teoría corpuscular de la luz de Newton, que suponía a la luz compuesta por partículas materiales. Michell supuso que estas partículas, al estar sujetas a la gravedad de una estrella, si ésta era lo suficientemente masiva podrían ser atrapadas no pudiendo salir de la estrella.

Por esa misma época el astrónomo William Herschel conjeturó que los conjuntos de estrellas llamados cúmulos estelares, al paso del tiempo sus astros se acercarían por efecto de la gravedad y se fundirían en una estrella masiva.
Michell tuvo entonces la posibilidad de especular con la idea de una estrella tan masiva que no dejara salir a los corpúsculos de luz. En otras palabras imaginó la existencia de hoyos negros.

El objetivo de este problema es calcular, al igual que lo hizo Michell, cuantos Soles como el nuestro se necesitan para formar un hoyo negro.

Michell al igual que Newton no conocían el valor de G, esto es la constante universal de la gravedad. Así que Michell no podía usarla en sus cálculos. De hecho inventó una balanza de torsión para medir dicha constante, pero la muerte lo sorprendió. Su balanza paso a manos de Cavendish quien la perfeccionó y midió el valor de G. Sin embargo y a pesar de que Cavendish dio parte de crédito al trabajo de Michell, la balanza hoy en día se conoce como de Cavendish.

En la época de Michell algunos parámetros astronómicos se conocían:
La distancia media Sol-Tierra $r_{T-S} = 1.5 \times 10^{11}$m
La duración del año $T = 365.25$días $\approx 3.17 \times 107$s
Diámetro del Sol $D_s = 1.4 \times 10^9$m
Velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8$m/s (medida por Roemer en 1676)

Simplifica el problema suponiendo que la órbita de la Tierra es circular y que la densidad del “hoyo negro” es siempre la misma y su valor es igual a la densidad de nuestro Sol.

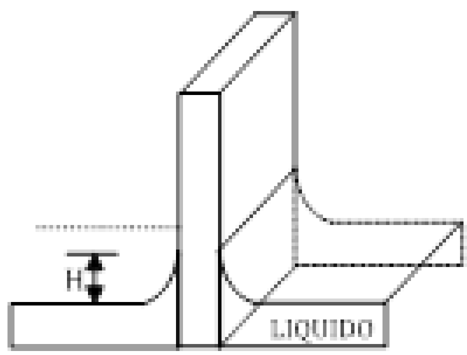
Preguntas:

1. Considera una estrella de masa M, ¿cuál será la velocidad de escape de un cuerpo material cualquiera?
2. Escribe el valor de $G \times M_S$ en función de r_{T-S} y T. Donde M_S es la masa del Sol.
3. ¿Cuántos Soles como el nuestro, según Michell, se necesitan para formar un hoyo negro?
4. ¿Cuál es el diámetro de este ”hoyo negro”?

Problema 2.

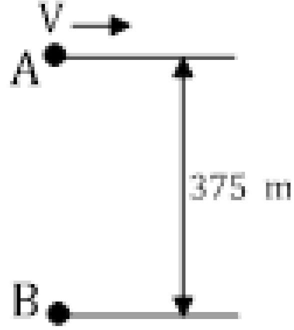
2a. Análisis dimensional.

Introducción. Es común en Física hacer estimaciones utilizando análisis dimensional. El análisis consiste en encontrar cual es la dependencia de una cantidad Física W en función de otros parámetros x, y, z etc. Generalmente se busca una relación del tipo: $W =$ (constante) $\times$ $(x^\alpha y^\beta z^\gamma)$. Aunque no siempre las magnitudes x, y, z, guardan una relación de potencias α, β, γ con W, muy frecuentemente se da el caso. Por otro lado es imposible encontrar el valor numérico de la constante recurriendo al análisis dimensional, pero su ignorancia no afecta el orden de magnitud en los cálculos estimativos.
Problema
La altura H que alcanza un liquido levantado por acción de fuerzas capilares esta determinado por la tensión superficial del líquido σ (fuerza sobre longitud), su densidad ρ y la aceleración de la gravedad g. Encuentre la dependencia de H en función de estos tres parámetros $H = H(\sigma,\rho,g)$. En este caso el valor de la constante es $\sqrt{2}$.



2b. Trineo en un lago congelado.

Se requiere que un trineo viaje del punto A al punto B que está localizado en ángulo recto a la dirección de su velocidad inicial $V = 10$m/s. Debido al bajo coeficiente de fricción entre el trineo y el lago, el trineo no se puede mover con una aceleración mayor a $a = 0.5\text{m}/s^2$. ¿Cuál será el tiempo mínimo para que el trineo llegue al punto B? ¿Qué tipo de curva describe su trayectoria?



2c. Caballo y entrenador.

Un caballo trota en un círculo de radio R a rapidez constante v. Su entrenador se encuentra parado dentro del círculo a una distancia r de su centro $r < R$) ¿Cuál será la máxima velocidad a la que se aproxime el caballo al entrenador?

2d. Experimento Termométrico.

Se realiza un experimento en el laboratorio para medir el calor específico de la plata. Sabemos que la plata tiene una densidad de $10.5 \times 10^3 kg/m^3$ y su punto de fusión es 962°C. El equipo de laboratorio incluye un cubo de plata de 2.0cm de lado y un recipiente de vidrio de 75 gramos (calor específico del vidrio 4.186kJ/ kg $^\circ$C). El recipiente contiene 100g de agua (calor específico = 4.186kJ/kg $^\circ$C) Tanto el recipiente como el agua están a 20 $^\circ$C.

1. ¿Cuál es la masa del cubo de plata?
   Se calienta el cubo de plata a una temperatura de 500 $^\circ$C. Se saca el cubo del horno y se sumerge en el agua. Se coloca un termómetro en el agua. Se observa una temperatura máxima en el termómetro de 41 $^\circ$C.

2. (i)Escribe las expresiones para el calor ganado por el agua, el calor ganado por el vidrio y el calor perdido por la plata. (ii) ¿Cómo se relacionan las cantidades del inciso anterior?

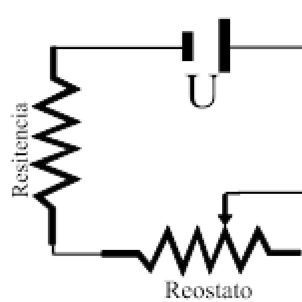
3. Determina el calor específico de la plata.

4. Si el cubo de plata tenía una temperatura de 20 $^\circ$C justo antes de ser colocado en el horno para llegar a una temperatura final de 500 $^\circ$C en 5 minutos, encuentra la razón (en watts) a la cual la energía térmica fue absorbida por el cubo durante su calentamiento.

Problema 3.

3a. Circuito Eléctrico.

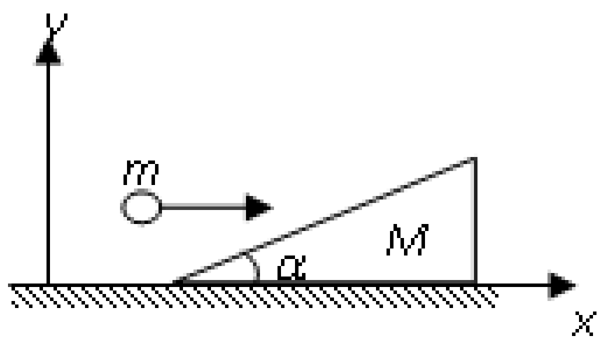
Una resistencia de valor constante, y un reóstato (esto es una resistencia variable) son conectados a una fuente de tensión (voltaje) constante U. Para un valor de corriente en el circuito de $I_1 = 2$A en el reóstato se disipa una potencia $P_1 = 48$W, para una corriente de $I_2 = 5$A en él se disipa una potencia de $P_2 = 30$W.



1. Determine la tensión (voltaje) de la fuente y el valor de la resistencia r.
2. Calcule el valor de la corriente en el circuito cuando la resistencia del reóstato es cero.
3. Determine la potencia máxima que puede liberarse en el reóstato ¿Cuál será la resistencia Rm en el reóstato en este caso?

3b. Cuña y pelota.

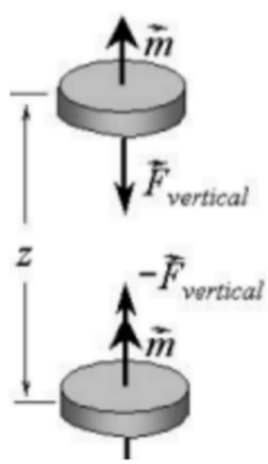
Sobre una tabla liza muy pesada se encuentra una cuña en reposo cuya masa es M y el ángulo de inclinación con el horizonte es α. Sobre la superficie inclinada y liza de la cuña choca una pelota de masa m que vuela horizontalmente, el choque se puede considerar elástico. Como resultado de lo cual la cuña comienza a moverse por la superficie. Determine la relación m/M, si al cabo de un tiempo determinado la pelota vuelve a caer en el mismo punto de la cuña, del cual rebotó. Desprecie las fuerzas de fricción.



Olimpiada Nacional de Física 2009.
Saltillo, Coahuila.
Examen Experimental.

Problema. Repulsión entre dipolos magnéticos.

Introducción: En la VIII olimpiada iberoamericana de Física celebrada en la Habana se aplicó un problema experimental donde se pedía la determinación del momento magnético m de un imán permanente comercial. Para este propósito a los concursantes se les proporcionó la siguiente fórmula para la magnitud de la fuerza, que ejerce un imán de momento magnético m sobre un segundo imán idéntico que se encuentra a una distancia z del primero, a lo largo del eje de simetría del sistema (ver figura):



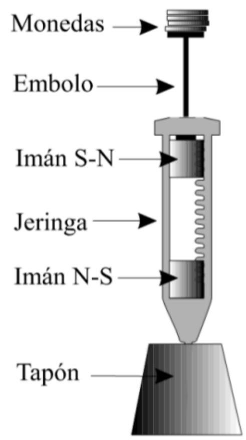
$$\vec{F}_{vertical} = \frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m^2}{z^4}$$

En la figura se representa el caso en que la fuerza es atractiva, pero ésta es repulsiva si los momentos magnéticos de los imanes tienen sentidos opuestos. En este caso se aplica la misma fórmula.

El propósito del experimento de esta olimpiada nacional mexicana es investigar si se cumple la fórmula dada. En otras palabras el objetivo es investigar experimentalmente cuál es la dependencia de $F(z)$ vertical con z, donde z es la separación vertical entre imanes.

Experimento: La figura muestra el dispositivo experimental.

Pieza.	**Peso.(g ± 0.05 g)**
imán	2.9
Émbolo	1.3
20 centavos	3
50 centavos	4.4
10 pesos	10.2



Tareas: Haga las tablas y gráficas que considere necesarias. Calcule el exponente x de la expresión $\vec{F}_{vertical} = cte\frac{1}{z^x}$ y estime su error.

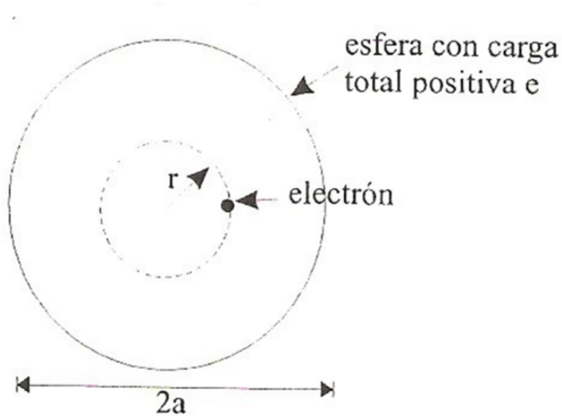
Olimpiada Nacional de Física 2009.
Saltillo, Coahuila.
Examen Teórico.

Problema 1. Pan de pasas.

En los últimos años del siglo XIX todavía se pensaba que el átomo era una partícula indivisible parecida a una pequeñísima bolita de billar. En 1886, Eugen Goldstein descubrió que los átomos tenían carga positiva. Poco más tarde J.J. Thomson descubre al electrón en 1897. Estos dos hechos hacen que Thomson proponga un modelo del átomo que se conoce con el nombre de "Pan de pasas".

Thomson imaginó que los átomos parecían pedazos de pan con uvas pasas. Es decir una estructura en la cual grupos de pequeños electrones cargador negativamente (las "uvas pasas") estaba dispersas dentro de una nube cargada positívamente ("el pan").

De acuerdo con este modelo, el átomo de hidrógeno en su estado de más baja energía (estado base) consiste de un electrón en reposo con carga $-e$, en el centro de una esfera de radio $a = 10^{-10}$ m cargada eléctricamente con una densidad de carga volumétrica uniforme σ y cuya carga total para mantener la neutralidad del átomo, es igual a $+e$. El objetivo del problema es encontrar la frecuencia de oscilación del electrón cuando es desplazado de sus posición de equilibrio.



1. Encuentre la expresión para la fuera que siente un electrón desplazado una distancia

r del centro de la esfera de carga positiva. Ayuda: Puede servirle la ley de Gauss. Considere $r < a$

2. Escriba la expresión para la frecuencia de oscilación del electrón desplazado.

3. ¿Cuál es el valor de esta frecuencia?

4. Se sabe que una carga emite radiación electromagnética (luz) de la misma frecuencia con la que oscila. Por otro lado, de mediciones experimentales, se encuentra que la luz emitida de más baja frecuencia (línea espectroscópica) de un gas de Hidrógeno, corresponde a una longitud de onda de $\lambda = 1.21154 \times 10^{-7}$ m. Para saber que tan bueno era el modelo de Thomson compare la frecuencia correspondiente a tal longitud de onda con la calculada en el inciso c. ¿En qué porcentaje difieren estas frecuencias?

Problema 2. Velocidad terminal.

Si un objeto cae de gran altura, alcanzará una velocidad constante llamada velocidad terminal. En este punto el peso del objeto se equilibra con la fuerza de resistencia del aire. Dicha fuerza es proporcional a la velocidad al cuadrado del objeto y al área que éste presenta en la dirección del movimiento.

1. Para cubos hechos del mismo material que caen con una de sus caras siempre paralela al suelo, ¿Cuál es la dependencia de su velocidad terminal V en términos del tamaño de la arista a del cubo?

2. Encuentre la ecuación de la velocidad terminal de un cubo de arista a y densidad ρ_h suponiendo que la energía gravitacional que se gana al descender una distancia h se va no en acelerar al cubo sino en acelerar a la velocidad terminal al aire contenido en una columna con base cuadrada igual a la cara del cubo y altura igual a h. La densidad del aire es $\rho_a = 1.2Kgm^{-3}$

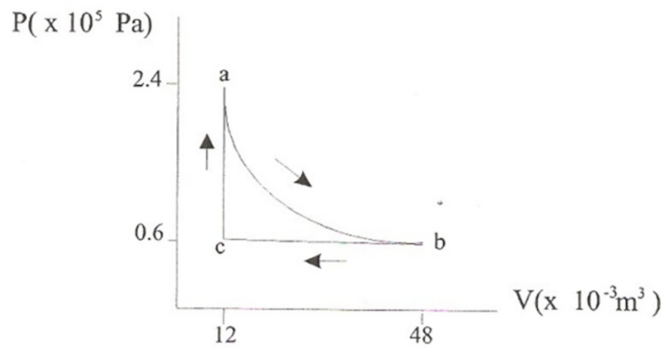
3. Encuentre la velocidad terminal de un cubo de densidad $\rho_c = 10^3 Kgm^{-3}$ y arista $a = 0.4$ m

Problema 3. La anti-tierra.

Supongamos que del otro lado del Sol existe un planeta igual a la Tierra que gira en la misma órbita que la Tierra y con la misma frecuencia de rotación alrededor del Sol. De esta manera ese planeta no podría ser observador desde la Tierra ya que siempre estaría detrás del Sol. Suponiendo que ese planeta existiera, tuviera la mima masa que la Tierra y la órbita de ambas fuera exactamente circular. ¿En cuánto alteraría su presencia la duración del año? Suponga que la órbita de la Tierra en ausencia de ese planeta es circular y que tiene el mismo radio que en la situación en la que los dos planetas estén presentes. Suponga también que la duración del año real (sin la presencia de esta anti-tierra) es exactamente 365 días.

Problema 4. Ciclo Termodinámico.

Una muestra de 0.4 moles de un gas ideal experimenta diversos cambios al ir del estado a al estado b al estado c y de regreso al estado a, a lo largo del ciclo mostrado en el siguiente diagrama P-V



La trayectoria ab es una expansión a temperatura constante (expansión isotérmica) y se puede demostrar que el trabajo hecho por el gas es este proceso está dado por:

$$W_{ab} = -nRT\ln(V_b/V_a)$$

donde n es el número de moles, R es la constante universalde los gases y T la temperatura absoluta.

Los calores específicos molares para el gas son $C_v = 20.8J/mol \cdot K$ (a presión constante).

1. ¿Cuál es la temperatura de?
   a) el estado a
   b) el estado b
   c) el estado c
2. Determine el cambio de energía interna del gas para
   a) paso bc
   b) paso ca
   c) paso ab
3. ¿Cuánto trabajo W_{ab} hace el gas durante el paso ab?
4. ¿Cuál es el trabajo total hecho en el ciclo $abca$?
   a) ¿Se absorbe calor o se emite calor durante el paso ab?
   b) Si es así, ¿Cuánto calor?
5. ¿Cúal es la eficiencia máxima posible para un ciclo de carnot que opere entre las temperaturas de los estados a y c?

CALCULOS Y MEDICIONES ADICIONALES

Pregunta 2 Volumen hasta la marca del gotero.

$$V_t = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 l$$

donde D es el diámetro interior del gotero. l es la altura de la marca del gotero (esto diferirá en cada estudiante).

$$D = (74 \text{ pixeles}) \times \frac{2.54 \text{ cm}}{300 \text{ pixeles}} = 0.63 \text{ cm}$$

$$l = 3.3 \text{ cm}$$

Si despreciamos el pequeño volumen de la boquilla del gotero, obtenemos

$$V_t = 1.02 \text{ cm}^3$$

Pregunta 5 Tensión superficial. El balance de fuerzas entre la tensión superficial y el peso de una gota es:

$$\gamma L = mg$$

donde $L = \pi d$ es el perímetro de la parte exterior de la boquilla, con d su diámetro:

$$d = (50 \text{ pixeles}) \times \frac{2.54 \text{ cm}}{300 \text{ pixeles}} = 0.42 \text{ cm} \quad L = \pi d = 1.32 \text{ cm}$$

La masa de una gota es $m = \rho v$ donde v es el volumen de la gota, hallado en la **Pregunta 4** y ρ es la densidad de la solución correspondiente:

$$\rho = \rho_{\mathrm{H_2O}} + \phi(\rho_{\mathrm{OH}} - \rho_{\mathrm{H_2O}})$$

Por lo tanto, la tensión superficial es

$$\gamma = \frac{1}{L} \left(\rho_{\mathrm{H_2O}} + \phi(\rho_{\mathrm{OH}} - \rho_{\mathrm{H_2O}}) \right) \left(A + Be^{-4\phi} \right)$$

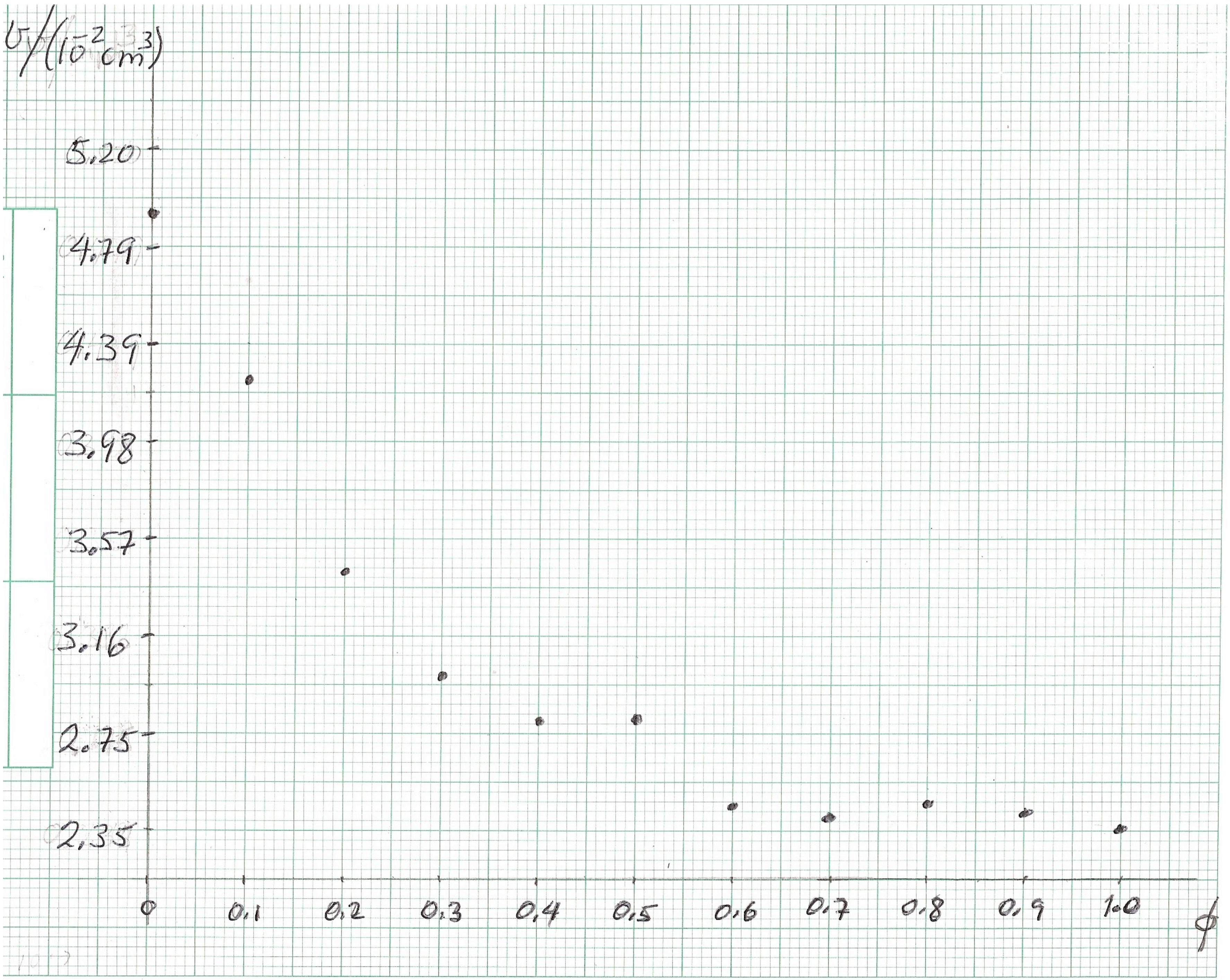
TABLA

ϕ	No. de gotas	No. de gotas	No. de gotas	Promedio	$v/10^{-2}\,cm^3$
0.0	20	22	20	20.7	4.93
0.1	23	24	25	24.0	4.25
0.2	29	31	29	29.7	3.43
0.3	33	34	35	34.0	3.00
0.4	37	35	37	36.3	2.81
0.5	38	36	37	36.0	2.83
0.6	40	42	41	41.0	2.49
0.7	42	42	43	42.3	2.41
0.8	42	41	41	41.3	2.47
0.9	43	42	41	42.0	2.43
1.0	44	43	43	43.3	2.35

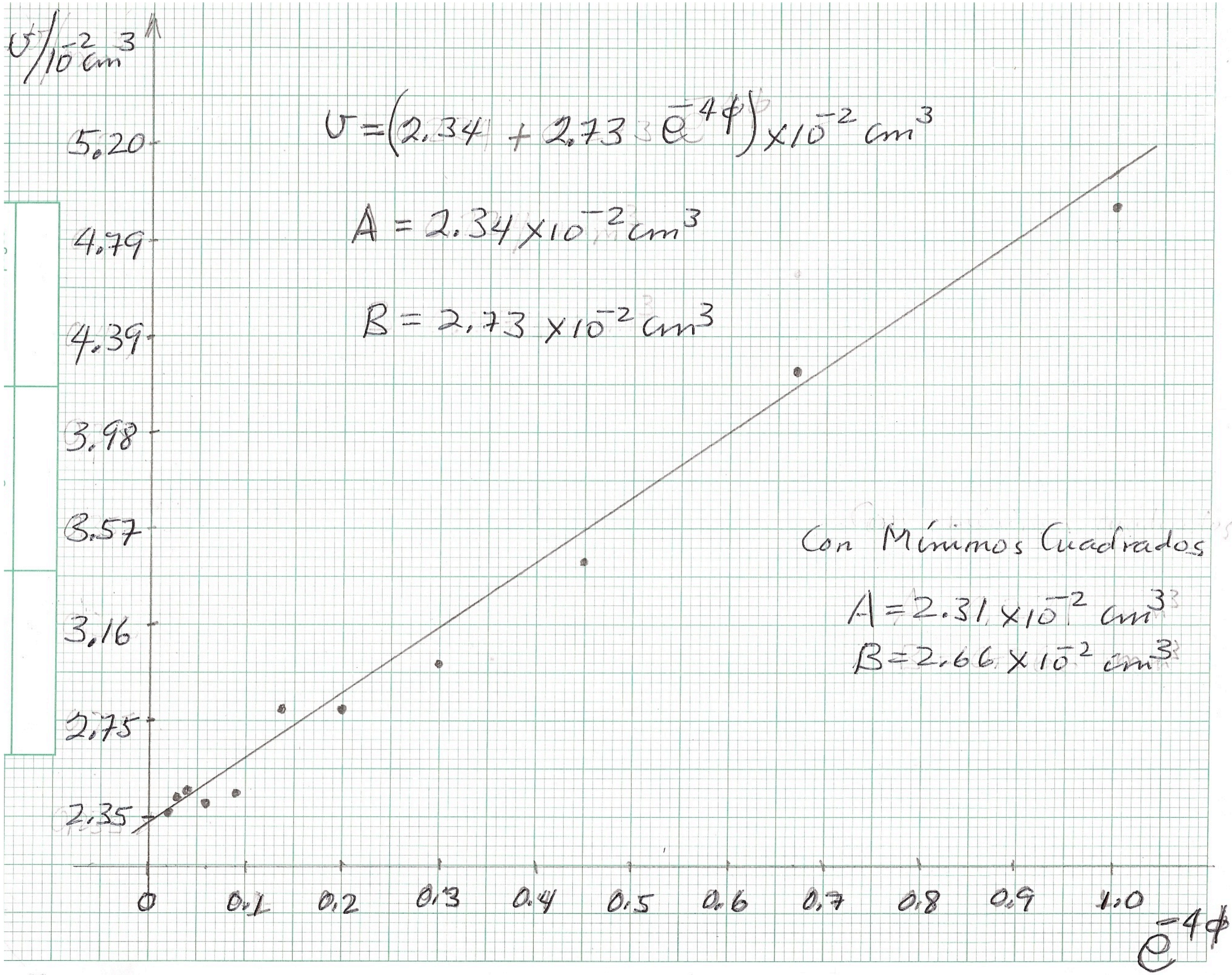
Volumen del líquido en el gotero hasta la marca $V_t =$ $\boxed{1.02\ cm^3}$

4. $v = \boxed{2.34\times10^{-2}\ cm^3} + \boxed{2.73\times10^{-2}\ cm^3}\ e^{-\alpha\phi}$

5. $L = \boxed{1.32\ cm}$ $\quad\gamma = \frac{1}{L}(\rho_{H_2O}+\phi(\rho_{OH}-\rho_{H_2O}))(A+Be^{-4\phi})$



υ/(10⁻² cm³)
5.20
4.79
4.39
3.98
3.57
3.16
2.75
2.35
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
ϕ



$v/10^{-2}\,cm^3$
5.20
4.79
4.39
3.98
3.57
3.16
2.75
2.35
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1.0
$e^{-4\phi}$
$v = (2.34 + 2.73\, e^{-4\phi}) \times 10^{-2}\ cm^3$
$A = 2.34 \times 10^{-2}\ cm^3$
$B = 2.73 \times 10^{-2}\ cm^3$
Con Mínimos Cuadrados
$A = 2.31 \times 10^{-2}\ cm^3$
$B = 2.66 \times 10^{-2}\ cm^3$

XXII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Guadalajara, Jal. 20-24 de noviembre de 2011
Prueba experimental

Seguramente has observado cómo el agua se acumula en el extremo de una llave, formando gotas que caen sucesivamente. Inicialmente, puede observarse una pequeña superficie ovalada. Después, a medida que el agua se acumula, esta superficie va tomando forma esférica y finalmente cae. También podemos ver que las gotas siempre caen cuando alcanzan un determinado volumen. Es decir, no caen a veces gotas pequeñas y luego gotas grandes. Si el flujo de agua se mantiene constante, las gotas que se desprenden tienen siempre el mismo tamaño. Sin embargo, si en vez de agua, saliera alcohol, la gotas se desprenderían en otro momento y su volumen sería diferente.

La explicación del hecho de que líquidos diferentes generen gotas de distinto tamaño, reside en el mismo principio que justifica que algunos insectos puedan "caminar" sobre la superficie del agua y que puedas usar servilletas de papel para absorber agua, y la que igualmente explica porque la sabia asciende desde las raíces hasta las hojas y porqué el detergente sirve para lavar. La explicación de todos estos fenómenos reside en una propiedad que tienen todas las sustancias que presentan un límite en su extensión, una frontera que la separe de otra fase diferente.

Esta propiedad se denomina *tensión superficial*, y corresponde a la fuerza de cohesión por unidad de longitud que un líquido ejerce sobre la frontera que lo separa de otro material. Entonces podemos pensar que, en el momento en que una gota se desprende de un gotero, el peso de la gota se equilibra con la fuerza de cohesión. En este problema experimental analizaremos este hecho.

Material

- Bandeja de trabajo (úsala para evitar que accidentalmente se mojen tus hojas de trabajo)
- Botella de agua
- Botella de alcohol (CUIDADO: este alcohol NO es ingerible)
- 2 jeringas de 3 ml cada una. Usa una para el alcohol y otra para el agua. Ponles una pequeña marca con las etiquetas para que no las confundas
- 1 frasco. Usa este frasco para preparar las soluciones de alcohol en agua.
- 1 Piceta. Llena la piceta de agua y úsala para enjuagar el frasco antes de preparar una nueva solución.

- Toallas de papel. Úsalas para secar el frasco después de enjuagarlo.
- Un gotero con una marca. La marca corresponde a un volumen que deberás determinar. Si no puedes ver claramente la marca, resáltala con lápiz.
- Papel milimétrico, hojas blancas, etiquetas, lápiz y regla.
- Recipiente de desperdicio, úsalo para vaciar la solución que hayas usado y no te sirva.

La parte experimental consiste en preparar soluciones de alcohol en agua a diferente concentración volumétrica ϕ:

$$\phi = \frac{V_{\text{alcohol}}}{V_{\text{alcohol}} + V_{\text{agua}}},$$

es decir, la concentración volumétrica ϕ de alcohol en agua, se define como el volumen del alcohol dividido entre la suma del volumen del alcohol y el volumen del agua.

Para cada solución, llenarás el gotero hasta la marca establecida y contarás el número de gotas que se obtienen al vaciar dicho volumen.

Preguntas

1 (6 puntos)
Prepara soluciones volumétricas desde $\phi = 0.0$ hasta $\phi = 1.0$, de 0.1 en 0.1. Para cada solución llena el gotero hasta la marca y cuenta el número de gotas que vacían el gotero. Repite cada medición de número de gotas tres veces y calcula el promedio. Reporta tus resultados en la tabla.
SUGERENCIA: Usa un volumen total de la solución de 10 ml.

2 (2.5 puntos)
Mide el volumen del líquido en el gotero hasta la marca, denótalo como V_t y escríbelo en la hoja de la tabla. Calcula el volumen de las gotas de cada solución y escríbelo en la tabla. Llama v al volumen de las gotas. Te sugerimos reportar tres cifras significativas. Para este ejercicio utiliza la fotografía que se muestra en la Fig 1. Indica claramente las unidades que uses.

3 (3.0 puntos)
Haz una gráfica del volumen v de las gotas como función de la concentración ϕ.

4 (6 puntos)
Un buen ajuste de la gráfica anterior es de la forma:

$$v = A + Be^{-\alpha\phi}$$

con $\alpha = 4$. Por medio de un análisis gráfico calcula el valor de A y de B.

5 (2.5 puntos)

La fuerza de cohesión entre la gota que cuelga y la boquilla del gotero esta dada por: $F_{\text{cohesion}} = \gamma L$, donde γ es la tensión superficial del líquido y L la longitud de la linea de contacto entre la gota y la boquilla. Reporta el valor de L.

Dado que la tensión superficial de un líquido corresponde a la fuerza de cohesión por unidad de longitud, podemos pensar que, en el momento en que la gota se desprende del gotero, el peso de la gota se equilibra con la fuerza de cohesión. De acuerdo con lo anterior, expresa la tensión superficial en términos de las cantidades conocidas. Denota como ρ_{OH} a la densidad del alcohol y $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$ a la del agua .

Recuerda entregar todas las hojas donde hayas realizado tus cálculos.

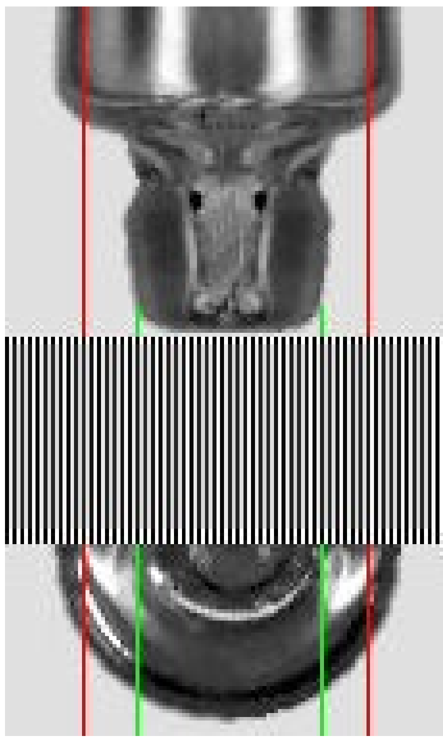


Figura 1: Fotografía digital de la boquilla del gotero, vista de frente y de lado. CUIDADO: La fotografía está amplificada de manera arbitraria. Sin embargo, las líneas corresponden a una escala de 300 pixeles por pulgada. Nota, también, que las líneas blancas y negras tienen un pixel de ancho cada una de ellas.

TABLA

ϕ	No. de gotas	No. de gotas	No. de gotas	Promedio	v
0.0					
0.1					
0.2					
0.3					
0.4					
0.5					
0.6					
0.7					
0.8					
0.9					
1.0					

Volumen del líquido en el gotero hasta la marca $V_t =$ $\boxed{}$

4. $v = \boxed{} + \boxed{}\, e^{-\alpha\phi}$

5. $L = \boxed{}$ $\qquad \gamma = \boxed{}$

SMF
Sociedad Mexicana de Física

XXII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Guadalajara, Jal. 20-24 de noviembre de 2011
Prueba teórica

---

1. **PROBLEMA Colisión de piedras (8 puntos)**

   Una piedra esférica se deja caer desde un edificio alto de altura h (desde la calle) al tiempo $t = 0$. En el mismo instante otra piedra idéntica se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso de la calle con una velocidad u en la misma línea vertical del movimiento de la primera piedra.

1.1	Calcule el tiempo t_c al cual las piedras chocan.	2 punto

1.2	Si al chocar, las piedras tienen la misma *magnitud* de la velocidad ¿cuales son los valores de u y t_c?	2 punto

1.3	Continuando con los resultados del inciso anterior, si la colisión es elástica calcule los tiempos a los cuales las piedras golpean el piso. Exprese tales tiempos en términos de t_c. Recuerda que en una colisión elástica algunas cantidades se conservan.	2 puntos

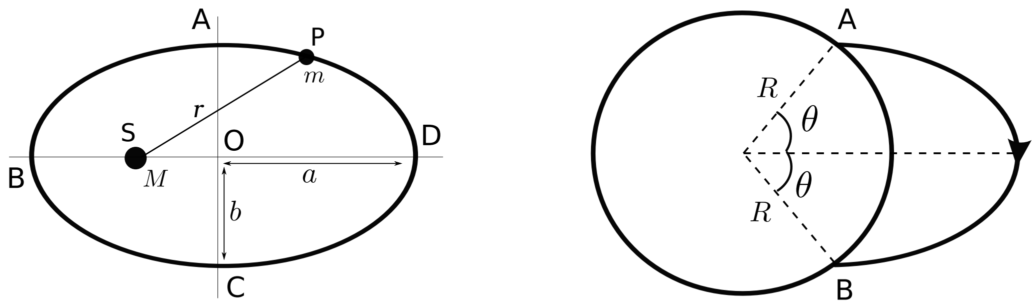
1.4	Haga un diagrama de la trayectoria (altura contra tiempo) para cada piedra y especifique claramente los tiempos y alturas en sus diagramas.	2 puntos

2. **PROBLEMA Leyes de Kepler. (7 puntos)** Un planeta P de masa m se encuentra en una orbita elíptica alrededor de una estrella S de masa M, como se indica en la figura 1a. Cuando el planeta se encuentra a una distancia r de la estrella, tiene velocidad v. Considere que los semiejes mayor y menor de la elipse tienen longitudes $2a$ y $2b$.

2.1	Escriba una expresión para la energía E del planeta.	0.5 punto

2.2	De la expresión anterior, deduzca el punto donde la velocidad v es máxima y el punto donde es mínima.	1 punto

2.3	Discuta si el tiempo en que se recorre el arco A-B-C es el mismo que en el que se recorre el arco C-D-A, o si es diferente.	1 punto



(a) (b)

Figura 1

La Tercera Ley de Kepler establece que el periodo T de una órbita elíptica está relacionada con el semieje mayor a por: $T^2 = ka^3$, donde k es una constante.

2.4	Determine el valor numérico de la constante usando el hecho de que la orbita de la Tierra alrededor del Sol puede considerarse como circular, es decir, $a = b$, con el Sol en O. La distancia Tierra - Sol es $R_S = 1.5 \times 10^{11}$ m.	0.5 punto

2.5	El cometa Halley da una vuelta alrededor del Sol cada 76 años. Calcule la longitud del semieje mayor de la orbita del cometa. Exprésela en términos de R_S.	0.5 punto

La Segunda Ley de Kepler nos dice que la línea r, del planeta P a la estrella S, barre áreas iguales en tiempos iguales. Es decir, el área que barre entre dos puntos de la órbita es proporcional al tiempo que tarda en ir de un punto al otro.

Considere ahora un cohete que es lanzado desde la superficie de un planeta esférico de radio R, desde un punto A y que regresa a la superficie en el punto B, vea la figura 1b. La separación angular entre el punto de lanzamiento A y el de aterrizaje B, con respecto al centro del planeta es 2θ. La trayectoria entre A y B es “media” elipse, es decir, el eje mayor es $2R$ y el menor la distancia entre A y B. (El área de la elipse es πab)

2.6	¿Cuánto tarda el cohete en recorrer la trayectoria de A a B, suponiendo que tardaría T_0 en recorrer la elipse completa?	2.5 punto

2.7	El resultado anterior ¿se aplica al caso $\theta = 0$? explique.	1 punto

3. **PROBLEMA La brújula desviada (8 puntos)**

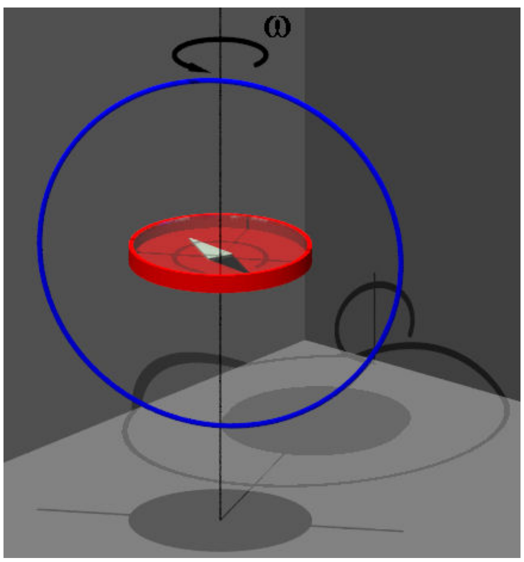
Supongamos que estamos en una posición en la superficie terrestre donde el campo magnético de la Tierra sólo tiene componente horizontal B. Una pequeña brújula (ver figura 2a) puede moverse libremente en el plano horizontal. En ausencia de otras fuerzas se alineará con las líneas del campo magnético apuntando hacia el norte magnético. Rodeando la brújula hay un anillo circular metálico de radio r que rota respecto al eje vertical (perpendicular al plano de la brújula) con frecuencia angular ω.

La permeabilidad del vacío es $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$ V s/Am

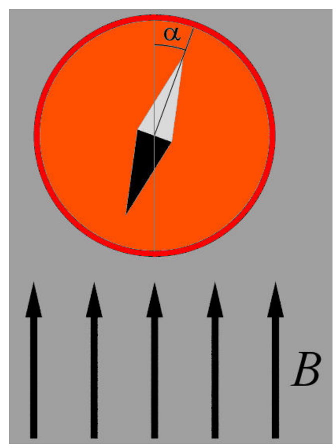
Pueden ser útiles las siguientes identidades trigonométricas:

$\cos(a)\,\text{sen}(a) = \dfrac{1}{2}\,\text{sen}(2a)$

$\text{sen}^2(a) = \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos(2a)\right]$



(a)



(b)

Figura 2

3.1	Ignorando la contribución de la brújula y tomando en cuenta que el anillo está rotando, el flujo magnético depende del tiempo. Suponga que para el tiempo inicial $t = 0$ el anillo tiene su plano perpendicular al campo magnético de la Tierra. ¿Cuál es el flujo magnético a través del anillo metálico?	1 punto

3.2	¿Cuál es el voltaje V inducido en el anillo?	1 punto

3.3	Si el anillo tiene resistencia R, ¿cuál será la corriente I inducida en el anillo?	1 punto

3.4	Esta corriente fluyendo por el anillo inducirá un campo magnético B_I en el centro del anillo. ¿Cuál será su magnitud?	1 punto

3.5	La dirección del campo magnético B_I es perpendicular al plano del anillo y rota con él. ¿Cuánto vale B_{par}, la componente de B_I paralelo al campo magnético de la Tierra B? ¿Cuánto vale B_{per}, la componente de B_I perpendicular al campo magnético de la Tierra B?	1 punto

3.6	Suponga que la respuesta de la brújula es lo suficientemente lenta para que los términos de los componentes de B_I que oscilan en el tiempo se promedien y se cancelen. Es decir, que términos que son proporcionales a $\operatorname{sen}(\alpha\theta)$ ó $\cos(\alpha\theta)$ (pero no producto de ellos) se pueden aproximar a cero. Encuentra la componente que sea constante en el tiempo y que por lo tanto pueda afectar la orientación de la brújula?	1 punto

3.7	¿Cuál es el ángulo α (ver figura 2b) que esta componente desviará a la brújula de su posición normal?	1 punto

3.8	Para el caso de $r = 0.1\text{m}$, $\omega = 100\ \text{s}^{-1}$, y $R = 10^{-4}\Omega$, ¿cuál será el valor de α?	1 punto

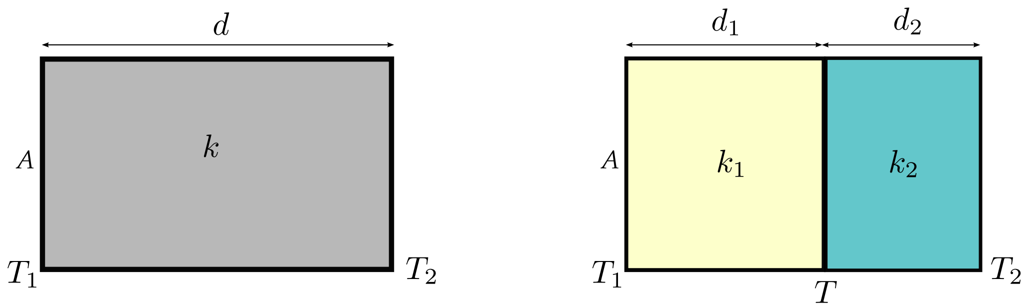
4. **PROBLEMA Conducción de calor (7 puntos)**

La transferencia de calor (razón de flujo de calor) a través de un solido, debido a la diferencia de temperaturas en sus caras opuestas, están regida por la ecuación:

$$-\frac{\triangle Q}{\triangle t} = kA\left(\frac{T_1 - T_2}{d}\right) \tag{1}$$

donde k se define como la conductividad del material, A es el área transversal del sólido y d es el espesor del solido; T_1 y T_2 corresponde a la temperatura en ambas caras del solido (figura 3a).

La ecuación (1) establece que la razón del flujo de calor (lado izquierdo) es proporcional a la diferencia de temperaturas en el solido y su área transversal (lado derecho). La constante de proporcionalidad k se conoce como conductividad térmica.



(a) (b)

Figura 3

Considera dos tablas de igual sección transversal A, con espesor d_1, d_2 y conductividad térmica k_1 y k_2 respectivamente. Se ponen en contacto en su sección transversal de forma paralela. La cara exterior a la primer tabla se mantiene a temperatura T_1, y la segunda a temperatura T_2 (figura 3b).

Si T es la temperatura en la unión de las dos tablas, calcula:

4.1	La razón de flujo de calor $\frac{\triangle Q}{\triangle t}$ a través de ambas tablas unidas.	3 puntos
4.2	La temperatura T en la interfase, en términos de los parámetros: k_1, d_1, T_1 y k_2, d_2, T_2	2 puntos
4.3	La conductividad equivalente k_{eq} de ambas tablas unidas.	2 puntos

XXII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Guadalajara, Jal. 20-24 de noviembre de 2011

Prueba teórica SOLUCIÓN

---

1. **PROBLEMA Colisión de piedras (8 puntos)**

Una piedra esférica se deja caer desde un edificio alto de altura h (desde la calle) al tiempo $t = 0$. En el mismo instante otra piedra idéntica se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso de la calle con una velocidad u en la misma línea vertical del movimiento de la primera piedra.

Ecuaciones de movimiento para cada piedra (caída libre):

piedra que cae

$$y_1(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1}$$

$$v_1(t) = -gt \tag{2}$$

piedra lanzada desde el suelo

$$y_2(t) = ut - \frac{1}{2}gt^2 \tag{3}$$

$$v_2(t) = u - gt \tag{4}$$

1.1	Calcule el tiempo t_c al cual las piedras chocan.	2 punto

De las expresiones para la posición de cada piedra:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\ y_2(t) &= ut - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{5}$$

en el tiempo t_c, las piedras chocan por lo que tienen la misma posición: $y_1(t_c) = y_2(t_c)$, igualando las expresiones anteriores:

$$h-\cancel{\frac{1}{2}g\left(t_c\right)^2}=ut_c-\cancel{\frac{1}{2}g\left(t_c\right)^2} \tag{6}$$

despejando se obtiene el tiempo en el que chocan ambas piedras:

$$\boxed{t_c=\frac{h}{u}} \tag{7}$$

1.2	Si al chocar, las piedras tienen la misma *magnitud* de la velocidad ¿cuales son los valores de u y t_c?	2 punto

La velocidad (en magnitud) para cada piedra al tiempo t está dada por:

$$\begin{aligned} &\left|v_1\left(t\right)\right|=gt \qquad \text{piedra que se deja caer} \\ &\left|v_2\left(t\right)\right|=u-gt \qquad \text{piedra que es lanzada desde el suelo} \end{aligned} \tag{8}$$

Si ahora en el momento del choque (a un tiempo t_c) la velocidades de ambas piedras son iguales:

$$gt_c=u-gt_c \quad \Rightarrow \quad u=2gt_c \tag{9}$$

sustituyendo este valor de u en (7) se obtiene el tiempo de choque:

$$t_c=\frac{h}{2gt_c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_c=\sqrt{\frac{h}{2g}}} \tag{10}$$

sustituyendo este valor en (9) se obtiene la velocidad u:

$$\boxed{u=2g\sqrt{\frac{h}{2g}}=2\sqrt{\frac{gh}{2}}} \tag{11}$$

con estos resultados se puede calcular la velocidad de ambas piedras en el momento del choque:

$$\begin{aligned} &\left|v_1\left(t_c\right)\right|=gt_c=g\sqrt{\frac{h}{2g}}=\sqrt{\frac{gh}{2}} && v_1\left(t_c\right)=-\sqrt{\frac{gh}{2}} \\ &\left|v_2\left(t_c\right)\right|=u-gt_c=2\sqrt{\frac{gh}{2}}-g\sqrt{\frac{h}{2g}}=\sqrt{\frac{gh}{2}} && v_2\left(t_c\right)=\sqrt{\frac{gh}{2}} \end{aligned} \tag{12}$$

1.3	Continuando con el inciso anterior, si la colisión es elástica calcule los tiempos a los cuales las piedras golpean el piso. Exprese tales tiempos en términos de t_c. Recuerda que en una colisión elástica algunas cantidades se conservan.	2 puntos

Como se trata de una colisión elástica, entonces se conserva la energía y el momento. Pero además las piedras son identicas y en el momento del chocan tienen la misma velocidad, por lo tanto la velocidad de ambas piedras después del choque es la misma, pero ahora con direcciones opuestas:

$$\begin{aligned} v_1(t_c) &= \sqrt{\frac{gh}{2}} \\ v_2(t_c) &= -\sqrt{\frac{gh}{2}} \end{aligned} \tag{13}$$

El tiempo de caída al suelo **desde el momento que chocan**, se encuentra poniendo $y = 0$ en (1) y (3). Entonces teniendo en cuenta las velocidades de ambas piedras depués del choque (13), para cada piedra tenemos:

$$\begin{aligned} t_{s1} &= \frac{v_1(t_c)}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{[v_1(t_c)]^2} y_c}\right] \qquad \text{piedra que se deja caer} \\ t_{s2} &= \frac{v_2(t_c)}{g}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{[v_2(t_c)]^2} y_c}\right] \qquad \text{piedra que es lanzada desde abajo} \end{aligned} \tag{14}$$

Donde y_c es la altura del choque, sustituyendo el valor de $t_c = \sqrt{h/2g}$ en cualquiera de (5):

$$y_c = h - \frac{1}{2} g \left(\sqrt{\frac{h}{2g}}\right)^2 = h - \frac{1}{2}\frac{h}{2} = \frac{3}{4}h \tag{15}$$

sutituyendo este valor (junto con $v_1(t_c)$ y $v_2(t_c)$) en (14):

$$\begin{aligned} t_{s1} &= \frac{1}{g}\sqrt{\frac{gh}{2}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{\left(\sqrt{\frac{gh}{2}}\right)^2}\frac{3}{4}h}\right] = \sqrt{\frac{h}{2g}}\,[1+2] = 3\sqrt{\frac{h}{2g}} = 3t_c \\ t_{s2} &= -\frac{1}{g}\sqrt{\frac{gh}{2}}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2g}{\left(-\sqrt{\frac{gh}{2}}\right)^2}\frac{3}{4}h}\right] = -\sqrt{\frac{h}{2g}}\,[1-2] = \sqrt{\frac{h}{2g}} = t_c \end{aligned} \tag{16}$$

Ahora solo hay que sumar el tiempo de choque para obtener el tiempo total en que cada piedra cae al suelo desde el tiempo inicial:

$$\begin{aligned} t_{caida} &= \boxed{4t_c} \qquad \text{piedra que se deja caer} \\ t_{caida} &= \boxed{2t_c} \qquad \text{piedra lanzada desde el suelo} \end{aligned} \tag{17}$$

1.4	Haga un diagrama de la trayectoria (altura contra tiempo) para cada piedra y especifique claramente los tiempos y alturas en sus diagramas.	2 puntos

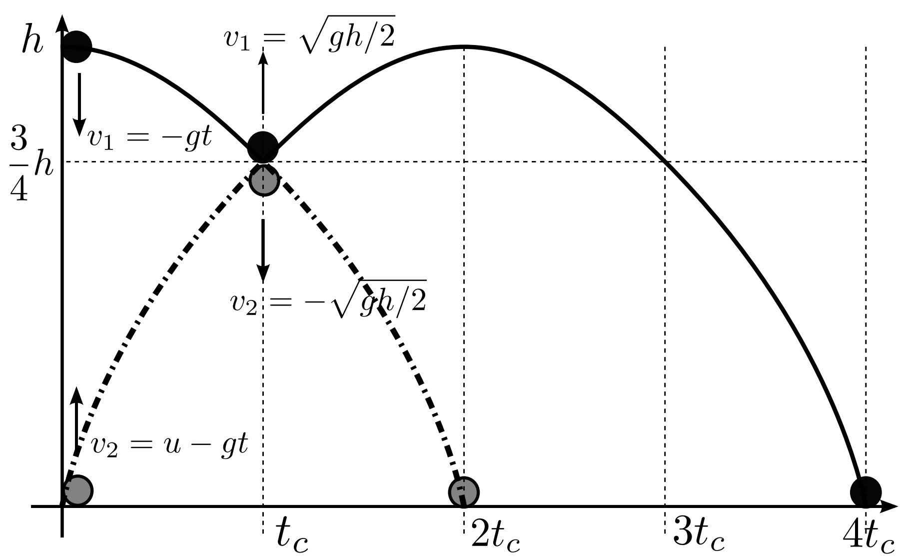


Figura 1: Trayectorias para ambas piedras, la linea continua para la piedra que se deja caer y la linea punteada para la piedra que se lanza desde el suelo.

2. **PROBLEMA Leyes de Kepler. (7 puntos)** Un planeta P de masa m se encuentra en una orbita elíptica alrededor de una estrella S de masa M, como se indica en la figura 2a. Cuando el planeta se encuentra a una distancia r de la estrella, tiene velocidad v. Considere que los semiejes mayor y menor de la elipse tienen longitudes $2a$ y $2b$.

2.1	Escriba una expresión para la energía E del planeta.	0.5 punto

$$E = E_{cinetica} + E_{potencial} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \tag{18}$$

2.2	De la expresión anterior, deduzca el punto donde la velocidad v es máxima y el punto donde es mínima.	1 punto

despejando la velocidad del resultado anterior:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}E + 2\frac{GM}{r}} \tag{19}$$

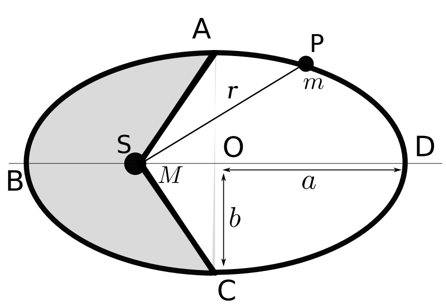
como la energía es constante la velocidad varía con la distancia r ($v \sim 1/\sqrt{r}$).

la velocidad máxima se obtiene cuando r es mínimo, es decir en el punto B.

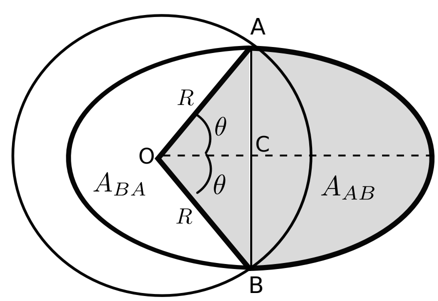
la velocidad mínima se obtiene cuando r es máximo, es decir en el punto D.

2.3	Discuta si el tiempo en que se recorre el arco A-B-C es el mismo que en el que se recorre el arco C-D-A, o si es diferente.	1 punto

De la Segunda Ley de Kepler, el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. El área que barre el planeta cuando recorre el arco A-B-C (área sombreada en la figura 2a) es diferente al área que barre cuando recorre el arco C-D-A (área sin sombrear), por lo tanto el tiempo en que recorre ambos arcos NO es el mismo.



(a)



(b)

Figura 2

La Tercera Ley de Kepler establece que el periodo T de una órbita elíptica está relacionada con el semieje mayor a por: $T^2 = ka^3$, donde k es una constante.

2.4	Determine el valor numérico de la constante usando el hecho que la orbita de la Tierra alrededor del Sol puede considerarse como circular, es decir, $a = b$, con el Sol en O. La distancia Tierra - Sol es $R_S = 1.5 \times 10^{11}$ m.	0.5punto

depejando k de la Tercera Ley de Kepler (con $a = R_s$):

$$k = \frac{T_{tierra}^2}{R_s^3} = \frac{(1 \text{ año})^2}{(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^3} \approx \boxed{2.9 \times 10^{-19} \text{s}^2/\text{m}^3} \tag{20}$$

2.5	El cometa Halley da una vuelta alrededor del Sol cada 76 años. Calcule la longitud del semieje mayor de la orbita del cometa. Exprésela en términos de R_S.	0.5 punto

De la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_{Halley}^2}{R_{Halley}^3} = \frac{T_{tierra}^2}{R_s^3} = k, \qquad \Rightarrow \quad R_{Halley} = \left(\frac{T_{Halley}}{T_{tierra}}\right)^{2/3} R_s = \left(\frac{76 \text{ años}}{1 \text{ año}}\right)^{2/3} R_s \approx \boxed{17.9\, R_s} \tag{21}$$

La Segunda Ley de Kepler nos dice que la línea r, del planeta P a la estrella S, barre áreas iguales en tiempos iguales. Es decir, el área que barre entre dos puntos de la órbita es proporcional al tiempo que tarda en ir de un punto al otro.

Considere ahora un cohete que es lanzado desde la superficie de un planeta esférico de radio R, desde un punto A y que regresa a la superficie en el punto B, vea la figura 2b. La separación angular entre el punto de lanzamiento A y el de aterrizaje B, con respecto al centro del planeta es 2θ. La trayectoria entre A y B es "media" elipse, es decir, el eje mayor es $2R$ y el menor la distancia entre A y B. (El área de la elipse es πab)

2.6	¿Cuánto tarda el cohete en recorrer la trayectoria de A a B, suponiendo que tardaría T_0 en recorrer la elipse completa?	2.5 punto

Sea A_{AB} y t_{AB} el área que barre de AB (área sombreada, figura 2b) y el tiempo en que la barre; de igual forma A_{BA} y t_{BA} el área que barre de BA (no sombreada) y el tiempo en que la barre. Por la Segunda Ley de Kepler:

$$\frac{t_{AB}}{A_{AB}} = \frac{t_{BA}}{A_{BA}} \qquad \Rightarrow \quad t_{AB} = \frac{A_{AB}}{A_{BA}} t_{BA} \tag{22}$$

como $t_{AB}+t_{BA}=T_0$, entonces:

$$t_{AB}=\frac{T_0}{1+\frac{A_{BA}}{A_{AB}}} \tag{23}$$

ahora bien, el área total de la elipse es:

$$A_{AB}+A_{BA}=\pi ab=\pi\left(R\right)\left(R\operatorname{sen}\theta\right)=\pi R^2\operatorname{sen}\theta \tag{24}$$

mientras que el área A_{AB} es la mitad del área de la elipse, más dos veces el área del triangulo OCA (figura 2b):

$$A_{AB}=\frac{\pi R^2\operatorname{sen}\theta}{2}+2\left(\frac{R\cos\theta\times R\operatorname{sen}\theta}{2}\right)=\frac{\pi R^2\operatorname{sen}\theta}{2}+R^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta=R^2\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\pi}{2}+\cos\theta\right) \tag{25}$$

dividiendolos las ecuaciones (24) y (25), se obtiene:

$$\frac{A_{AB}+A_{BA}}{A_{AB}}=\frac{\pi\cancel{R^2\operatorname{sen}\theta}}{\cancel{R^2\operatorname{sen}\theta}\left(\frac{\pi}{2}+\cos\theta\right)}=\frac{2\pi}{\pi+2\cos\theta} \tag{26}$$

de donde:

$$\frac{A_{BA}}{A_{AB}}=\frac{2\pi}{\pi+2\cos\theta}-1 \tag{27}$$

finalmente sustituyendo está relación en (23) se obtiene el tiempo que le toma al cohete el ir de A a B:

$$\boxed{t_{AB}=\frac{T_0}{\cancel{1}+\frac{2\pi}{\pi+2\cos\theta}-\cancel{1}}=\frac{T_0}{\frac{2\pi}{\pi+2\cos\theta}}=T_0\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos\theta}{\pi}\right)} \tag{28}$$

2.7	El resultado anterior ¿se aplica al caso $\theta=0$? explique.	1 punto

Si se aplica, en este caso el cohete alcanza una altura R y regresa al mismo punto desde donde fue lanzado. El tiempo de vuelo del cohete es en este caso:

$$t_{AB}\left(\theta=0\right)=T_0\left(\frac{1}{2}+\frac{\cos 0}{\pi}\right)=T_0\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\right)\approx 0.8\,T_0 \tag{29}$$

3. **PROBLEMA La brújula desviada (8 puntos)**

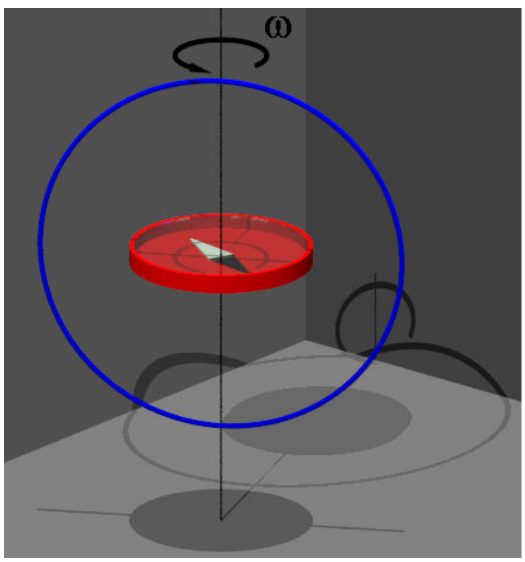
Supongamos que estamos en una posición en la superficie terrestre donde el campo magnético de la Tierra sólo tiene componente horizontal B. Una pequeña brújula (ver figura 3a) puede moverse libremente en el plano horizontal. En ausencia de otras fuerzas se alineará con las líneas del campo magnético apuntando hacia el norte magnético. Rodeando la brújula hay un anillo circular metálico de radio r que rota respecto al eje vertical (perpendicular al plano de la brújula) con frecuencia angular ω.

La permeabilidad del vacío es $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6}$ Vs/Am

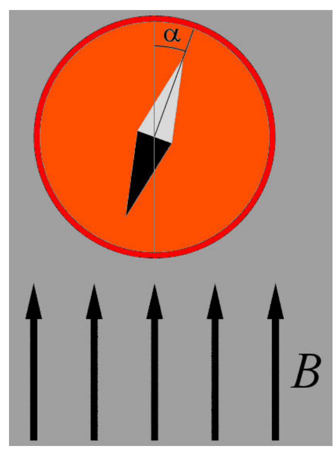
Pueden ser útiles las siguientes identidades trigonométricas:

$\cos(a) \operatorname{sen}(a) = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen}(2a)$

$\operatorname{sen}^2(a) = \dfrac{1}{2}[1 - \cos(2a)]$



(a)



(b)

Figura 3

3.1	Ignorando la contribución de la brújula y tomando en cuenta que el anillo está rotando, el flujo magnético depende del tiempo. Suponga que para el tiempo inicial $t = 0$ el anillo tiene su plano perpendicular al campo magnético de la Tierra. ¿Cuál es el flujo magnético a través del anillo metálico?	1 punto

El flujo magnético se define como: $\Phi = \pi r^2 B \cos(\omega t)$

3.2	¿Cuál es el voltaje V inducido en el anillo?	1 punto

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 B\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

3.3	Si el anillo tiene resistencia R, ¿cuál será la corriente I inducida en el anillo?	1 punto

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\pi r^2 B\omega}{R} \operatorname{sen}(\omega t)$$

3.4	Esta corriente fluyendo por el anillo inducirá un campo magnético B_I en el centro del anillo. ¿Cuál será su magnitud?	1 punto

$$B_I = \mu_0 \frac{I}{2r} = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}(\omega t)$$

3.5	La dirección del campo magnético B_I es perpendicular al plano del anillo y rota con él. ¿Cuánto vale B_{par}, la componente de B_I paralelo al campo magnético de la Tierra B? ¿Cuánto vale B_{per}, la componente de B_I perpendicular al campo magnético de la Tierra B?	1 punto

La componente paralela será:

$$B_{par} = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}(\omega t) \cos(\omega t) = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \frac{1}{2} \operatorname{sen}(2\omega t)$$

mientras que la componente perpendicular será:

$$B_{per} = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}(\omega t) \operatorname{sen}(\omega t) = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{2R} \operatorname{sen}^2(\omega t) = \mu_0 \frac{\pi r B\omega}{4R} [1 - \cos(2\omega t)]$$

3.6	Suponga que la respuesta de la brújula es lo suficientemente lenta para que los términos de los componentes de B_I que oscilan en el tiempo se promedien y se cancelen. Es decir, que términos que son proporcionales a $\operatorname{sen}(\alpha\theta)$ ó $\cos(\alpha\theta)$ (pero no producto de ellos) se pueden aproximar a cero. Encuentra la componente que sea constante en el tiempo y que por lo tanto pueda afectar la orientación de la brújula?	1 punto

Si, es el término:

a) $B'_{per} = \mu_0 \dfrac{\pi r B\omega}{4R}$

3.7	¿Cuál es el ángulo α (ver figura 3b) que esta componente constante en el tiempo a la brújula de su posición normal?	1 punto

$$\tan(\alpha) = \frac{B'_{per}}{B} = \mu_0 \frac{\pi r \omega}{4R}$$

3.8	Para el caso de $r = 0.1$ m, $\omega = 100$ s^{-1} , y $R = 10^{-4}$ ohms, ¿cuál será el valor de α?	1 punto

$$\alpha = \arctan\left[\mu_0 \frac{\pi r \omega}{4R}\right] = \arctan\left[1.26 \times 10^{-6} \text{ Vs/Am} \frac{\pi (0.1 \text{ m}) \left(100 \text{ s}^{-1}\right)}{4 \left(10^{-4} \text{ ohms}\right)}\right] \approx 5.6° \tag{30}$$

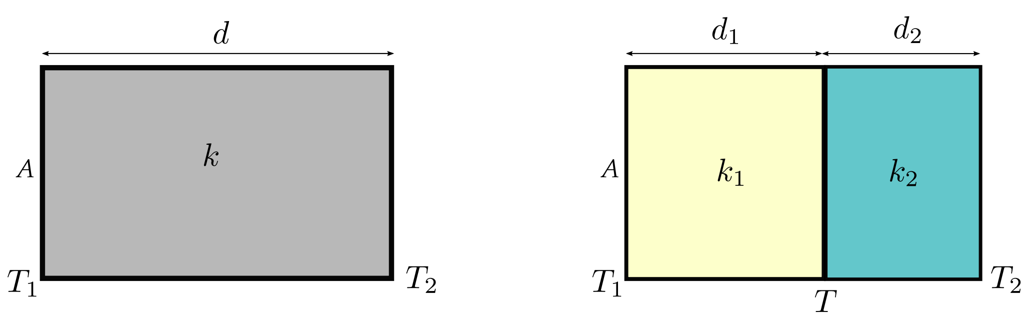
4. **PROBLEMA Conducción de calor (7 puntos)**

La transferencia de calor (razón de flujo de calor) a través de un solido, debido a la diferencia de temperaturas en sus caras opuestas, están regida por la ecuación:

$$-\frac{\triangle Q}{\triangle t} = kA\left(\frac{T_1 - T_2}{d}\right) \tag{31}$$

donde k se define como la conductividad del material, A es el área transversal del sólido y d es el espesor del solido; T_1 y T_2 corresponde a la temperatura en ambas caras del solido (figura 4a).

La ecuación (31) establece que la razón del flujo de calor (lado izquierdo) es proporcional a la diferencia de temperaturas en el solido y su área transversal (lado derecho). La constante de proporcionalidad k se conoce como conductividad térmica.



(a) (b)

Figura 4

Considera dos tablas de igual sección transversal A, con espesor d_1, d_2 y conductividad térmica k_1 y k_2 respectivamente. Se ponen en contacto en su sección transversal de forma paralela. La cara exterior a la primer tabla se mantiene a temperatura T_1, y la segunda a temperatura T_2 (figura 4b).

Si T es la temperatura en la unión de las dos tablas, calcula:

4.1	La razón de flujo de calor $\dfrac{\triangle Q}{\triangle t}$ a través de ambas tablas unidas	3 puntos

aplicando la ecuación (31) a cada tabla se obtiene la transferencia de calor a través de cada una de ellas:

$$-\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{k_1 A\left(T_1 - T\right)}{d_1} \tag{32}$$

$$-\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{k_2 A\left(T - T_2\right)}{d_2} \tag{33}$$

de ambas expresiones se obtiene:

$$\begin{aligned} T_1 - T &= -\frac{d_1}{k_1 A}\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} \\ T - T_2 &= -\frac{d_2}{k_2 A}\frac{\Delta Q_2}{\Delta t} \end{aligned} \tag{34}$$

Como el flujo de calor se debe conservar, entonces:

$$\frac{\Delta Q_1}{\Delta t} = \frac{\Delta Q_2}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{35}$$

aplicando esta relación al par de ecuaciones (34) y sumandolas se obtiene la razón de flujo de calor a través las tablas unidas:

$$\boxed{-\frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{A\left(T_1 - T_2\right)}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}}} \tag{36}$$

4.2	La temperatura T en la interfase, en términos de los parámetros: k_1, d_1, T_1 y k_2, d_2, T_2	2 puntos

Eliminando $\Delta Q/\Delta t$ del par de ecuaciones (34), se encuentra la temperatura en la interfase de contacto :

$$\boxed{T = \frac{T_1\left(k_1/d_1\right) + T_2\left(k_2/d_2\right)}{\left(k_1/d_1\right) + \left(k_2/d_2\right)}} \tag{37}$$

4.3	La conductividad equivalente k_{eq} de ambas tablas unidas.	2 puntos

La ecuación (36) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$-\frac{\triangle Q}{\triangle t} = \frac{A\,(T_1 - T_2)}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}} = \frac{d}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}} \frac{A\,(T_1 - T_2)}{d} = k_{eq} \frac{A\,(T_1 - T_2)}{d} \tag{38}$$

donde $d = d_1 + d_2$, entonces la conductividad de la tabla compuesta es:

$$\boxed{k_{eq} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{k_1} + \frac{d_2}{k_2}}} \tag{39}$$

SMF
Sociedad Mexicana de Física

XXIII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Mérida, Yuc. 25-29 de noviembre de 2012
Prueba experimental

Cualquier objeto que colguemos de un eje y que oscile alrededor de este, se le llama *péndulo físico*. Este sistema por supuesto obedece las Leyes de Newton y su comportamiento es muy similar al de un péndulo ideal formado por una masa puntual suspendida por una cuerda sin masa.

En este problema analizarás las propiedades de oscilación de un péndulo físico formado por un tubo de plástico (PVC) en cuyo interior una parte está llena con yeso. Este tubo es parte de tu equipo experimental, obsérvalo y compáralo con el de la Figura 1 para que te vayas familiarizando con el. Como verás más abajo, el propósito del problema es hallar cuánto yeso hay en el tubo y la razón de la masas del tubo y del yeso.

Antes de iniciar el problema hagamos un repaso de la física del péndulo. Como se indica en la figura, el péndulo puede hacerse oscilar alrededor de un eje o pivote arbitrario. Llamemos L a la longitud del péndulo y R al radio de la sección transversal del tubo. Sea l_{cm} la posición del centro de masa del péndulo, medido desde el extremo donde están los agujeritos del tubo. Sea z a la distancia entre un pivote dado y el centro de masa del péndulo. Denotemos por M la masa del cilindro de plástico *sin* el yeso y m la masa del yeso dentro del tubo. Es decir, el péndulo tiene masa total $M + m$. El yeso llena una parte del tubo de longitud D.

El centro de masa del sistema anterior está dado por la siguiente expresión,

$$L - l_{cm} = \frac{1}{2}\frac{M\,L\, +\, m\,D}{M\, +\, m}. \tag{1}$$

Si demuestras esta expresión te ganas 0.5 puntos adicionales. No hay penalización si no lo demuestras.

Desplacemos el tubo un ángulo θ con respecto a la vertical. Se puede mostrar que la torca que hace la fuerza de gravedad sobre el tubo es,

$$\tau = -(M + m)\, g\, z\, \sin\theta. \tag{2}$$

Esta torca es la que lo hace oscilar libremente. Por otro lado, se puede mostrar que la torca está dada, a su vez, por

$$\tau = I(z)\,\alpha \tag{3}$$

donde

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{4}$$

es la aceleración angular del movimiento y

$$I(z) = (M+m)z^2 + M(\frac{L}{2} - l_{cm})^2 + m(L - l_{cm} - \frac{D}{2})^2 + \frac{M}{12}L^2 + \frac{m}{12}D^2 \tag{5}$$

es el momento de inercia del péndulo con respecto al pivote.

Si la amplitud de las oscilaciones es pequeña, es decir, si $\theta \leq 15^o$ (θ menor o igual a quince grados), se puede demostrar que el periodo de oscilación de este péndulo es

$$T(z) = 2\pi\sqrt{\frac{I(z)}{(M+m)gz}} \tag{6}$$

donde hemos indicado que el periodo depende de la posición del pivote. Recordamos que el periodo es tiempo que tarda el péndulo en hacer una oscilación completa ... Si demuestras la expresión del periodo con la información de arriba te ganas 0.5 puntos adicionales. No hay penalización si no lo demuestras.

Como se mencionó antes, el propósito del problema es realizar un análisis experimental que te permita determinar el valor de la altura D del yeso y el cociente de las masas M/m.

Material

- Péndulo físico (tubo de PVC con yeso)
- Soporte de madera con aguja de metal. Este dispositivo te servirá de pivote para el péndulo. CUIDADO! La aguja está muy puntiaguda, ten cuidado de no lastimarte. Mantén el taponcito puesto mientras mides los periodos.
- Pedazo de cinta plateada. Úsala para fijar el soporte a la mesa.
- Cronómetro. Tómate unos minutos para familiarizarte con el su uso. El botón de la derecha inicia y detiene el conteo. El botón de la izquierda lo pone en ceros.
- Hilo de cáñamo.
- Regla
- Papel milimétrico, hojas blancas y lápiz.

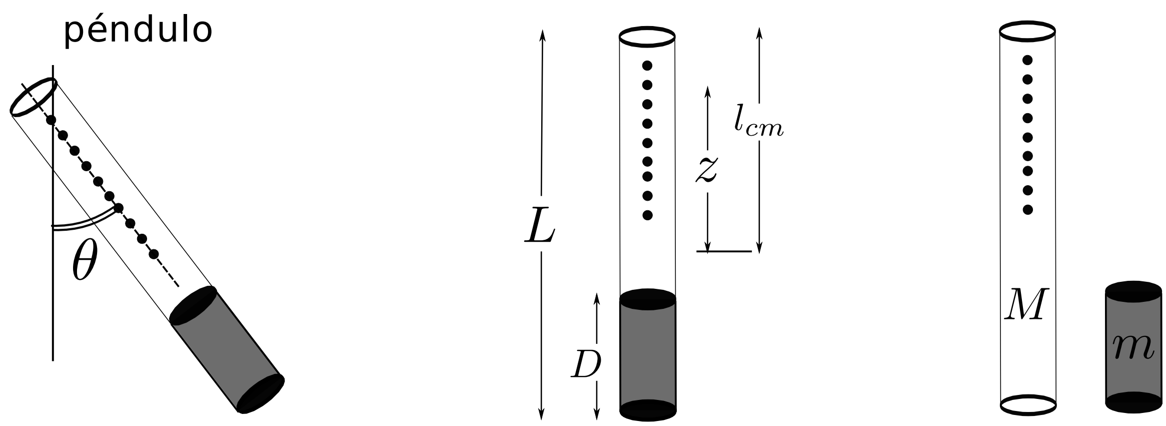


Figura 1: Péndulo físico formado por un tubo de PVC, lleno hasta una altura D por yeso. El tubo de PVC sin el yeso tiene masa M y el yeso tiene masa m.

Preguntas

Responde a cada una de las preguntas en la parte indica de las hojas de respuesta.

1 (2 puntos)

Mide la longitud L del péndulo y la posición de su centro de masa l_{cm}. Explica brevemente cómo determinaste l_{cm}. No reportes incertidumbres de tus medidas. Anota el número marcado en el tubo (péndulo) de tu equipo experimental.

2 (5 puntos)

Diseña una estrategia para determinar el periodo $T(z)$ del péndulo para cada valor de z. Realiza tus mediciones y repórtalas en la Tabla I. Explica brevemente tus mediciones. Usa no menos de 10 valores de z, pero trata de que cubran todo el rango de valores. No reportes incertidumbres de tus medidas.

3 (2.0 puntos)

Reporta en la Tabla II los valores obtenidos de $T(z)$ y z en la Pregunta 1. No reportes incertidumbres.

4 (2.5 puntos)

En la introducción al problema se explicó que la relación entre $T(z)$ y z está dada por

$$T(z) = 2\pi\sqrt{\frac{I(z)}{(M+m)gz}} \tag{7}$$

Realiza las transformaciones apropiadas tales que esta ecuación se convierta en la ecuación de una recta,

$$y = \alpha\, x \;+\; \beta \tag{8}$$

donde α es la pendiente de la recta y β la ordenada al origen. Identifica y, x, α y β

5 (1 punto)

Escribe en la Tabla III los valores de y y x. No reportes incertidumbres.

6 (5 puntos)

Realiza un análisis gráfico con los valores de la Tabla III y determina el valor de α y el de β, incluidas sus respectivas incertidumbres.

7 (2.5 puntos)

Determina los valores de la altura D del yeso y el cociente de las masas M/m, donde M es la masa del tubo y m la del yeso. No reportes incertidumbres de tus resultados. **Sugerencia:** Se puede mostrar que la longitud D del yeso, obedece la siguientes ecuación:

$$AD^2 + BD + C = 0 \tag{9}$$

donde $A = 1/3$,

$$\begin{aligned} B &= -(L - L_{cm}) - \frac{1}{2l_{cm} - L}\left[(\frac{L}{2} - l_{cm})^2 + \frac{L^2}{12} - \frac{\beta}{\alpha}\right] \\ C &= (L - l_{cm})^2 - \frac{\beta}{\alpha} + 2\frac{L - l_{cm}}{2l_{cm} - L}\left[(\frac{L}{2} - l_{cm})^2 + \frac{L^2}{12} - \frac{\beta}{\alpha}\right] \end{aligned} \tag{10}$$

Pregunta 1	**Hoja de Respuestas**

- Describe brevemente cómo determinaste el centro de masa del péndulo, emplea dibujos para tu explicación.

Anota el número marcado en el tubo (péndulo) de tu equipo experimental:
Longitud del péndulo: $L =$
Centro de masa del péndulo: $l_{mc} =$

Tabla I

Explica tu estrategia para medir el perido del péndulo para cada valor de z, así como los valores que reportas en la tabla

Tabla II

z	$T(z)$

Tabla III

y	x

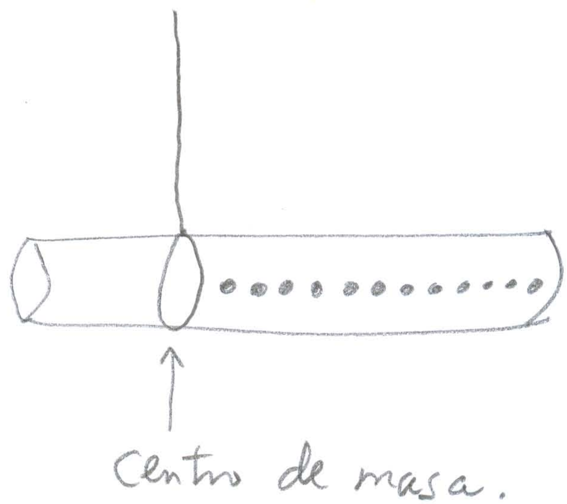
Pregunta 7	Hoja de Respuestas

Determina los valores de la altura D del yeso y el cociente de las masas M/m, donde M es la masa del tubo y m la del yeso.

Pregunta 1	Hoja de Respuestas

- Describe brevemente cómo determinaste el centro de masa del péndulo, emplea dibujos para tu explicación.

Usando el hilo colgué el péndulo hasta que se balanceó:



Longitud del péndulo $L = 29.8$ cm

Centro de masa del péndulo: $l_{mc} =$ 20.7 cm

Tabla I

z	19.6	17.6	15.6	13.6	11.6	9.6	7.6	5.6	3.6	2.6	1.6	
	9.84	9.62	8.85	8.56	8.35	8.38	8.62	8.62	9.72	11.03		
	9.90	9.53	8.81	8.66	8.40	8.50	8.78	8.66	9.68	10.94		
	9.87	9.50	8.87	8.66	8.34	8.53	8.63	8.65	9.75	11.00		
	9.91	9.62	8.90	8.59	8.41	8.44	8.75	8.62	9.78	10.91		
	9.91	9.59	8.84	8.63	8.37	8.47	8.72	8.59	9.75	10.85		
Promedio	9.89	9.57	8.85	8.62	8.37	8.46	8.70	8.63	9.74	10.95		

Explica tu estrategia para medir el perido del péndulo para cada valor de z, así como los valores que reportas en la tabla

z es la distancia del pivote al centro de masa.
Para 10 valores de z hice 5 conjuntos de mediciones de 10 periodos (ó 5 periodos) cada uno, para poder promediar.

$$T(z) = \frac{10\,\text{Periodos promedio}}{10}$$

Tabla II

z/cm	$T(z)$/seg
2.6	1.095
3.6	0.974
5.6	0.863
7.6	0.870
9.6	0.846
11.6	0.837
13.6	0.862
15.6	0.885
17.6	0.957
19.6	0.989

Pregunta 4	Hoja de Respuestas

$$T(z) = 2\pi \sqrt{\frac{I(z)}{(M+m) g z}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 I}{(M+m) g z} \quad ; \quad I = (M+m) z^2 + I_0$$

$$I_0 = M\left(\frac{L}{2} - l_{cm}\right)^2 + m\left(L - l_{cm} - \frac{D}{2}\right)^2 + \frac{M}{12} L^2 + \frac{m}{12} D^2$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{\cancel{(M+m)} g \cancel{z}} \cancel{(M+m)} z^{\cancel{2}} + \frac{4\pi^2 I_0}{(M+m) g z}$$

$$\Rightarrow \boxed{z T^2 = \frac{4\pi^2}{g} z^2 + \frac{4\pi^2 I_0}{(M+m) g}}$$

$$y = \alpha x + \beta$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} y = z T^2 & x = z^2 \\ \alpha = \dfrac{4\pi^2}{g} & \beta = \dfrac{4\pi^2 I_0}{(M+m) g} \end{array}}$$

Tabla III

y	x
3.12	6.76
3.42	12.96
4.17	31.36
5.75	57.76
6.87	92.16
8.13	134.56
10.10	184.96
12.22	243.36
16.12	309.76
19.17	384.16

$Y = ZT^2 \quad cm \cdot seg^2$

$X = Z^2 \quad cm^2$

$Y: 0 \longrightarrow 20$ en 20 cm   1 : 1 cm

$X: 0 \longrightarrow 400$ en 25 cm   16 : 1 cm

y en papel $y = Y$

x en papel $x = \frac{X}{16}$

$$\alpha = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

$X_2 = 320$ $Y_2 = 16.1$

$X_1 = 80$ $Y_1 = 6.2$

$$\boxed{\alpha = 0.041} \Rightarrow g = 957 \text{ cm/seg}^2$$

$$\boxed{\beta = 2.85}$$

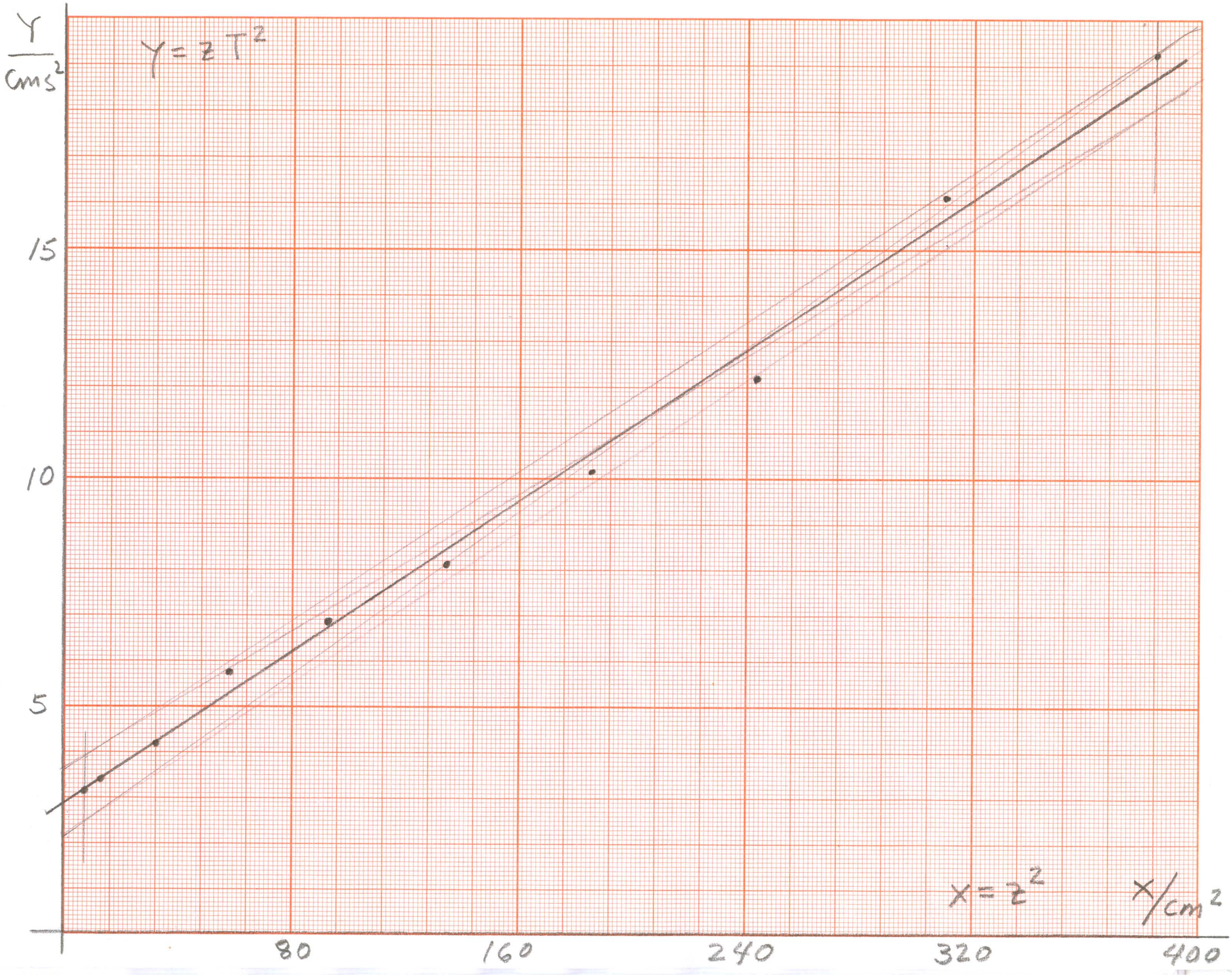
$$\alpha_{max} = \frac{19.3 - 2.5}{384 - 6.4} = 0.044$$

$$\alpha_{min} = \frac{18.1 - 3.9}{384 - 6.4} = 0.0386$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = (0.041 \pm 0.003) \frac{\text{seg}^2}{\text{cm}}}$$

$$\boxed{\beta = (2.8 \pm 0.7) \text{ cm seg}^2}$$

$\beta_{max} = 3.5$ $\beta_{min} = 2.1$



Y/cms²
Y = zT²
15
10
5
80
160
240
320
400
X = z²
X/cm²

Pregunta 7	**Hoja de Respuestas**

Determina los valores de la altura D del yeso y el cociente de las masas M/m, donde M es la masa del tubo y m la del yeso.

De la sugerencia $AD^2 + BD + C = 0$

$$A = \frac{1}{3}$$

$$B = -(L - l_{cm}) - \frac{1}{2l_{cm} - L}\left[\left(\frac{L}{2} - l_{cm}\right)^2 + \frac{L^2}{12} - \frac{\beta}{\alpha}\right] \approx -12.5$$

$$C = (L - l_{cm})^2 - \frac{\beta}{\alpha} + \frac{2(L - l_{cm})}{2l_{cm} - L}\left[\left(\frac{L}{2} - l_{cm}\right)^2 + \frac{L^2}{12} - \frac{\beta}{\alpha}\right] \approx 76.2$$

$$\boxed{D = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \approx 7.8 \text{ cm}} \quad (\text{raiz } -)$$

—— o ——

De la ecuación de centro de masa:

$$L - l_{cm} = \frac{1}{2}\,\frac{ML + mD}{M + m} \Rightarrow 2(L - l_{cm}) = \frac{\frac{M}{m}L + D}{1 + \frac{M}{m}}$$

$$\Rightarrow \frac{M}{m} = \frac{2(L - l_{cm}) - D}{2l_{cm} - L}$$

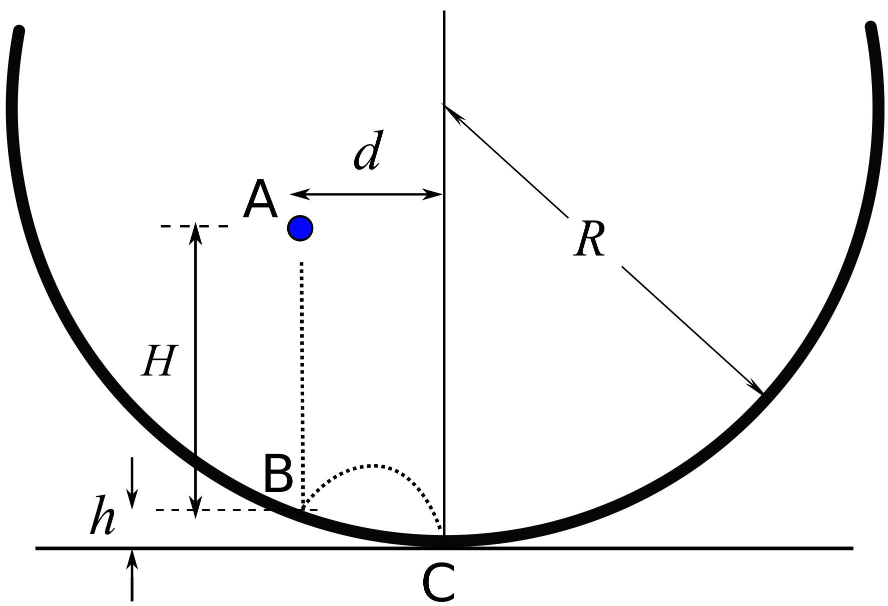
$$\Rightarrow \boxed{\frac{M}{m} = 0.896 \approx 0.9}$$

XXIII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Mérida Yucatán, 25-29 de noviembre de 2012

Prueba teórica

1. **Caída libre sobre una superficie esférica (10 puntos).**

   Una canica se deja caer verticalmente con velocidad inicial cero sobre una superficie esférica de radio R. La canica se deja caer desde una altura H (punto A de la figura) medida desde la superficie esférica y a una distancia d del eje de simetría de la superficie esférica, como se muestra en la figura. La canica rebota elásticamente sobre la superficie (punto B) y cae de nuevo justo en el centro de la superficie (punto C).



Preguntas

1.1	Calcula la velocidad v_0 con la cual rebota la canica sobre la superficie de la esfera.	1 puntos
1.2	Calcula el tiempo que le toma a la canica desde que rebota sobre la superficie (punto B) hasta que cae en el centro de la superficie (punto C) en términos de las variables H, R, h y g (aceleración de la gravedad).	5 puntos
1.3	Encuentra una ecuación o relación que involucre h, que es la distancia desde el suelo hasta el punto donde rebota la canica sobre la superficie (como se muestra en la figura), en términos de los parametros H, R, y la distancia d. No intentes resolverla	2 puntos
1.4	Considera ahora que la canica se deja caer desde una distancia mucho muy cercana al eje de simetría, calcula en este caso el valor aproximado de la altura H, en términos del radio R de la superficie esférica, a la que se debe dejar caer la canica	2 puntos

Formulas trigonométricas que te pueden ser útiles:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \end{aligned} \tag{1}$$

Para ángulos pequeños $\theta \ll 1$, las funciones trigonométricas se pueden aproximar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{2}$$

2. **Comparando las fuerzas eléctrica y gravitacional (5 puntos).**

   Una estrella de neutrones tiene una densidad del orden de $\rho = 10^{14}$ g/cm^3 y un radio de aproximadamente $R = 20$ km.

   Supongamos que se coloca un electrón sobre la superficie de la estrella de neutrones,

   Preguntas:

2.1	¿Cuál es la atracción gravitacional sobre el electrón debido a la estrella de neutrones?	2 puntos
2.2	¿Qué carga eléctrica habría que colocar en el centro de la estrella de neutrones para equilibrar la atracción gravitacional que encontraste en el inciso anterior?	2 puntos
2.3	Cuantos electrones habría que poner en el centro de la estrella de neutrones para equilibrar la fuerza gravitacional	1 puntos

   $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2

   Constante gravitacional: $G = 6.7 \times 10^{-11}$N m^2/kg^2

   Carga del electrón: $e =$ -1.6 $\times 10^{-19}$ C

   Masa del electrón: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$Kg

3. **Experimento de Torricelli dentro de un pistón (10 puntos).**

Un tubo vertical de vidrio, de área transversal $A = 1\,\text{cm}^2$ y cerrado en su parte superior, está sumergido en mercurio. Todo el sistema se encuentra contenido dentro de un cilindro con un pistón móvil, como se muestra en la figura 1. El cilindro, además contiene aire en su interior. La parte superior del tubo de vidrio contiene una cantidad de hidrógeno encerrado. El tubo y el cilindro son impermeables, es decir no dejan entrar ni salir material. Tanto el aire como el hidrógeno y el mercurio se encuentran en contacto térmico, por lo que están a la misma temperatura.

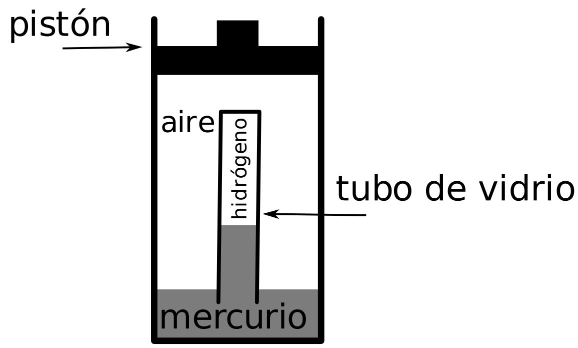
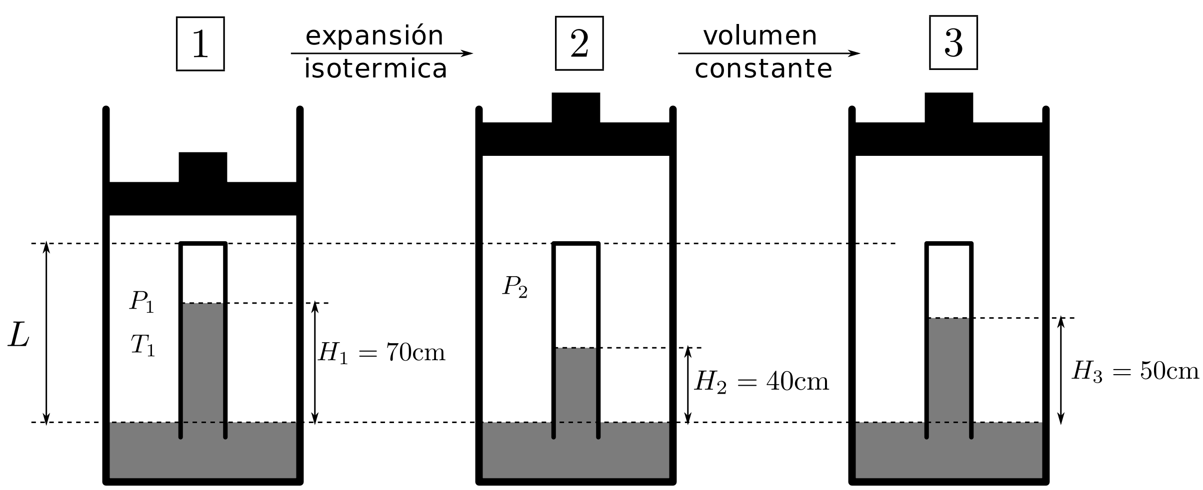


Figura 1

El sistema del tubo y el cilindro pasa por 3 estados de equilibrio a través de dos procesos diferentes, como se muestra en la figura siguiente:



El proceso $\boxed{1} \longrightarrow \boxed{2}$ se trata de una expansión isotérmica.

En el proceso $\boxed{2} \longrightarrow \boxed{3}$ el sistema se calienta manteniendo constante el volumen del aire contenido en el cilindro; nota que el hidrógeno se comprime debido a la expansión térmica del mercurio.

Se conocen los siguientes datos en cada uno de los estados de equilibrio:

$\boxed{1}$

Altura de la columna de mercurio: $H_1 = 70$ cm

Presión del aire dentro del cilindro: $P_1 = 133 \times 10^3$ Pa

Temperatura $T_1 = 273$ K

$\boxed{2}$

Altura de la columna de mercurio: $H_2 = 40$ cm

Presión del aire dentro del cilindro: $P_2 = 8 \times 10^4$ Pa

$\boxed{3}$

Altura de la columna de mercurio: $H_3 = 50$ cm

Preguntas:

Considerando que el hidrógeno y el aire se comportan como un gas ideal y que el mercurio es incompresible, contesta las siguientes preguntas.

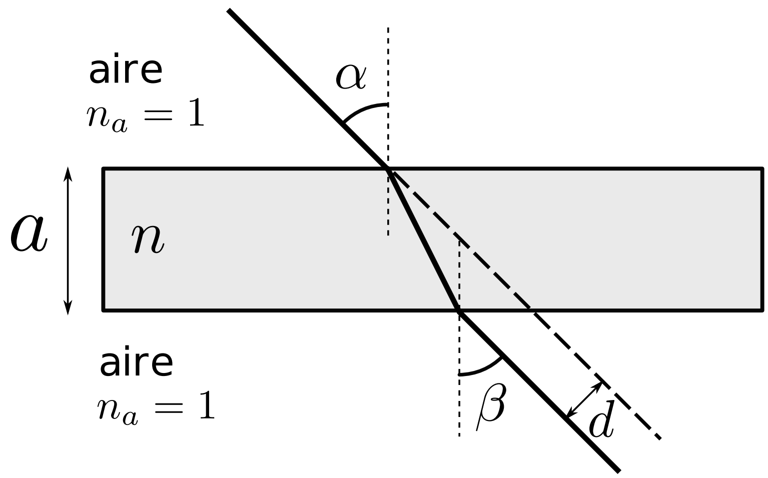
3.1	Cuál es la altura L desde la superficie del mercurio dentro del cilindro, hasta la parte superior del tubo de vidrio.	4 puntos
3.2	¿Cuál es la cantidad de hidrógeno contenido en la parte superior del tubo de vidrio?. Expresa esta cantidad en moles	2 puntos
3.3	¿Cuál es la temperatura final T_3 en el estado $\boxed{3}$?	4 puntos

Constante universal de los gases: $R = 8.314$ J/mol K

Densidad del mercurio: $\rho = 1.36 \times 10^4$ kg/m^3.

4. **Óptica geométrica (5 puntos).**

Un haz de luz que se propaga en el aire incide sobre la cara superior de una placa de grosor a y cuyo material tiene índice de refracción n. El haz incide con un ángulo α (ver figura) con respecto a la normal al vidrio. El haz de luz se refracta en la placa y emerge de nuevo al aire por debajo de la placa con un ángulo β respecto de la vertical.



Preguntas:

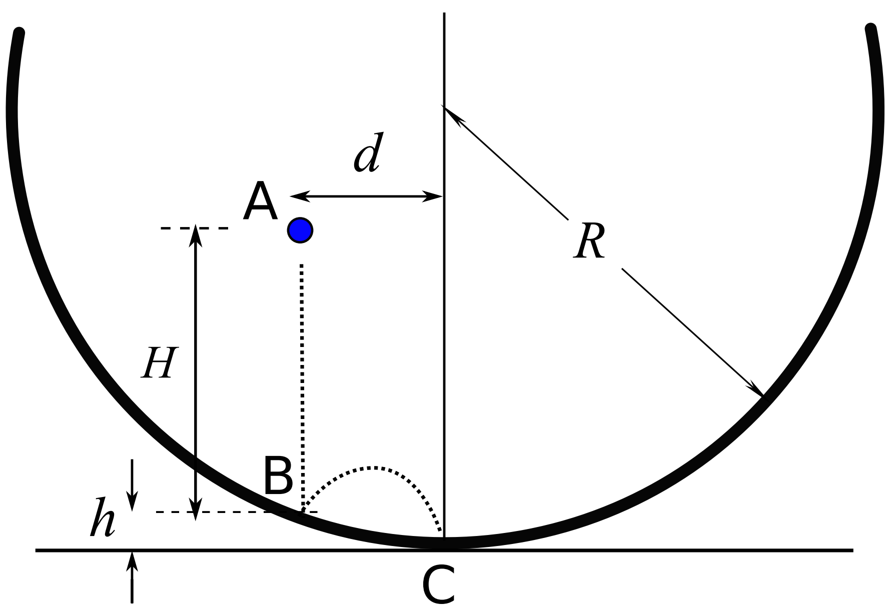
4.1	Muestra que el haz que sale por debajo de la placa es paralelo al haz que incide por arriba de la placa, es decir muestra que: $\beta = \alpha$.	1 punto
4.2	Calcula la distancia d que separa los dos haces de luz, el de incidencia y el que sale por debajo de la placa en términos de solamente el ángulo de incidencia α, el índice de refracción n y el grosor de la placa a.	2 puntos
4.3	Si el ángulo de incidencia es $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ radianes, calcula el valor del índice de refracción de la placa n para el cual la distancia de separación entre los haces es la misma que el grosor de la placa, es decir para $a = d$.	2 puntos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \end{aligned} \tag{3}$$

XXIII OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Mérida Yucatán, 25-29 de noviembre de 2012

Prueba teórica

1. **Caída libre sobre una superficie esférica (10 puntos).** Una canica se deja caer verticalmente con velocidad inicial cero sobre una superficie esférica de radio R. La canica se deja caer desde una altura H (punto A de la figura) medida desde la superficie esférica y a una distancia d del eje de simetría de la superficie esférica, como se muestra en la figura. La canica rebota elásticamente sobre la superficie (punto B) y cae de nuevo justo en el centro de la superficie (punto C).



Formulas trigonométricas que te pueden ser útiles:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta \cos\alpha \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha \cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \end{aligned} \tag{1}$$

Para ángulos pequeños $\theta \ll 1$, las funciones trigonométricas se pueden aproximar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Preguntas

1.1	Calcula la velocidad v_0 con la cual rebota la canica sobre la superficie de la esfera.	1 puntos

Respuesta: De la caída libre de la canica desde una altura H, con velocidad inicial nula, se obtiene el tiempo de caída de la canica:

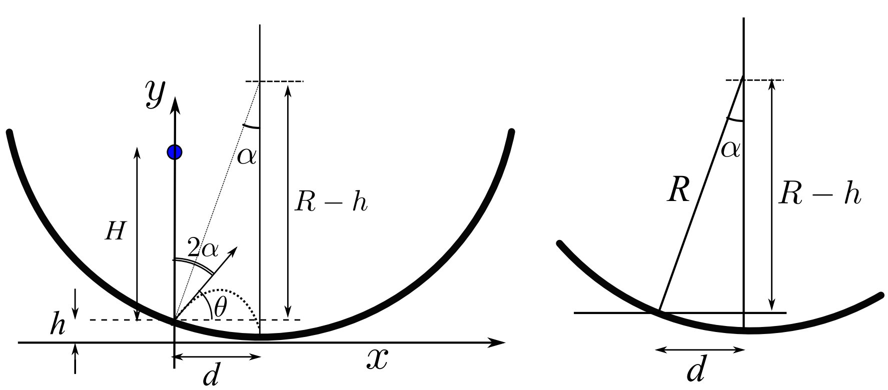
$$H - \frac{1}{2} g t_c^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad t_c = \sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{3}$$

entonces la velocidad con la cual llega la canica sobre la superficie es:

$$\boxed{v_0 = g t_c = \sqrt{2gH}} \tag{4}$$

1.2	Calcula el tiempo que le toma a la canica desde que rebota sobre la superficie (punto B) hasta que cae en el centro de la superficie (punto C) en términos de las variables H, R, h y g (aceleración de la gravedad).	5 puntos

Respuesta:



Después que la canica choca contra la superficie rebota con velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2gH}$ y un ángulo $\theta = \pi/2 - 2\alpha$ respecto de la horizontal. La trayectoria de la canica desde que rebota, hasta que cae en el centro de la superficie es un tiro parabólico, por lo que las ecuaciones de movimiento, respecto del los ejes mostrados en la figura:

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos(\theta)\ t = v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)\, t \\ y &= h + v_0 \operatorname{sen}(\theta)\ t - \frac{1}{2} g t^2 = h + v_0 \cos(2\alpha)\ t - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned} \tag{5}$$

donde se uso:

$\cos\theta = \cos(\pi/2 - 2\alpha) = \cos\pi/2 \cos 2\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen}\pi/2 = \operatorname{sen} 2\alpha$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}(\pi/2 - 2\alpha) = \operatorname{sen}\pi/2 \cos 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \cos\pi/2 = \cos 2\alpha$

Si t_v es el tiempo que le toma a la canica desde que rebota hasta que cae en el centro de la superficie, entonces de la primer ecuación de (5) el desplazamiento horizontal d esta dado por:

$$\begin{aligned} d &= v_0 \operatorname{sen}(2\alpha)\, t_v \\ &= \sqrt{2gH}\,(2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha)\ t_v \end{aligned} \tag{6}$$

del triangulo rectangulo que se muestra en la figura se obtiene las siguientes relaciones trigonometricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{d}{R} \\ \cos\alpha &= \frac{R-h}{R} \end{aligned} \tag{7}$$

sustituyendolas en la ecuación (6):

$$d = \sqrt{2gH}\left(2\frac{d}{R}\frac{R-h}{R}\right) t_v \tag{8}$$

entonces el tiempo de vuelo t_v es:

$$\boxed{t_v = \frac{R^2}{2\sqrt{2gH}\,(R-h)}} \tag{9}$$

1.3	Calcula la distancia h, desde el suelo hasta el punto donde rebota la canica sobre la superficie (como se muestra en la figura), en términos de los mismos parametros H, R, g y adicionalmente la distancia d.	2 puntos

Respuesta:

En el tiempo t_v la canica cae al centro de la superficie, es decir en $y = 0$, por lo que de la segunda ecuación (5) se tiene que:

$$\begin{aligned} y\left(t_v\right) = 0 &= h + v_0 \cos\left(2\alpha\right)\, t_v - \frac{1}{2} g \left(t_v\right)^2 \\ \Rightarrow & h + \sqrt{2gH} \cos\left(2\alpha\right)\, t_v - \frac{1}{2} g \left(t_v\right)^2 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

usando la siguiente relación trigonometrica:

$\cos\left(2\alpha\right) = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - \left(\frac{d}{R}\right)^2$,

y sustituyendo el valor encontrado de t_v en la ecuación (10):

$$h + \sqrt{2gH}\left[\left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - \left(\frac{d}{R}\right)^2\right] \frac{R^2}{2\sqrt{2gH}\left(R-h\right)} - \frac{1}{2} g \left[\frac{R^2}{2\sqrt{2gH}\left(R-h\right)}\right]^2 = 0 \tag{11}$$

simplificando resulta la siguiente ecuación:

$$h + \left[\left(\frac{R-h}{R}\right)^2 - \left(\frac{d}{R}\right)^2\right] \frac{R^2}{2\left(R-h\right)} - \frac{R^4}{16H\left(R-h\right)^2} = 0 \tag{12}$$

1.4	Considera ahora que la canica se deja caer desde una distancia mucho muy cercana al eje de simetría, calcula en este caso el valor aproximado de la altura H, en términos del radio R de la superficie esférica, a la que se debe dejar caer la canica	2 puntos

Respuesta:

En este caso se puede aproximar que $h = d \approx 0$, sustituyendo en (12) se simplifica y se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{R}{2} - \frac{R^2}{16H} &= 0 \\ \Rightarrow & \boxed{H = \frac{R}{8}} \end{aligned} \tag{13}$$

2. **Comparando las fuerzas eléctrica y gravitacional (5 puntos).**

Una estrella de neutrones tiene una densidad del orden de $\rho = 10^{14}$ g/cm^3 y un radio de aproximadamente $R = 20$ km.

Supongamos que se coloca un electrón sobre la superficie de la estrella de neutrones,

$k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9$ Nm^2/C^2

Constante gravitacional: $G = 6.7 \times 10^{-11}$N m^2/kg^2

Carga del electrón: $e =$ -1.6 $\times$ 10^{-19} C

Preguntas:

2.1	¿Cuál es la atracción gravitacional sobre el electrón debido a la estrella de neutrones?	2 puntos

Respuesta:

cambiamos las unidades para la densidad de la estrella de neutrones:

$$\rho = 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \frac{1\text{kg}}{100\text{ g}} \left(\frac{100\text{cm}}{1\text{ m}}\right)^3 \approx 10^{17}\text{kg/m}^3 \tag{14}$$

con esto podemos calcular la masa de la estrella de neutrones:

$$M = \rho V = \rho \frac{4}{3} R^3 = \frac{4}{3}\left(2 \times 10^4 \text{m}\right)^3 \left(10^{17}\text{kg/m}^3\right) = \frac{32}{3} \times 10^{29} \text{ kg} = 1.06 \times 10^{30} \text{ kg} \tag{15}$$

entonces la fuerza gravitacional sobre el electrón sobre la superficie de la estrella de neutrones:

$$F_g = G\frac{Mm_e}{R^2} = 6.67 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2 \frac{\left(1.06 \times 10^{30}\text{ kg}\right)\left(9.1 \times 10^{-31}\text{kg}\right)}{\left(20 \times 10^3\text{ m}\right)^2} \approx \boxed{1.61 \times 10^{-19}\text{ N}} \tag{16}$$

2.2	¿Qué carga eléctrica habría que colocar en el centro de la estrella de neutrones para equilibrar la atracción gravitacional que encontraste en el inciso anterior?	2 puntos

Respuesta:

Igualando la fuerza gravitacional y eléctrica:

$$F_{elec} = k\frac{Qe}{R^2} = G\frac{Mm_e}{R^2} = F_g \tag{17}$$

donde la carga Q es la necesaria para que ambas fuerzas sean iguales, despejando Q se obtiene:

$$Q = \frac{R^2}{k\,e}F_g = \frac{\left(20 \times 10^3\text{m}\right)^2}{\left(9 \times 10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2\right)\,(\text{-}1.6 \times 10^{-19}\text{C})}\left(1.61 \times 10^{-19}\ \text{N}\right) \approx \boxed{-0.04\ \text{C}} \tag{18}$$

la carga debe ser negativa para que sea de repulsión y equilibre la fuerza gravitación de atracción, otra forma es obtener una expresión general, despejando Q de la misma ecuación (17):

$$Q = \frac{G}{k}\frac{Mm_e}{e} = \frac{\left(6.67 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2\right)\left(1.06 \times 10^{30}\ \text{kg}\right)\left(9.1 \times 10^{-31}\text{kg}\right)}{\left(9 \times 10^9\text{Nm}^2/\text{C}^2\right)\left(-1.6 \times 10^{-19}\text{C}\right)} \approx \boxed{-0.04\ \text{C}} \tag{19}$$

el resultado no depende de la separación entre las cargas, es decir del radio R de la estrella de neutrones.

2.3	Cuantos electrones habría que poner en el centro de la estrella de neutrones para equilibrar la fuerza gravitacional	1 puntos

Respuesta:

dividiendo la carga Q entre la carga del electrón, se obtiene el número de electrones que equivale la carga:

$$N_e = \frac{Q}{e} = \frac{-0.04\text{C}}{-1.6 \times 10^{-19}\text{C}} \approx 2.5 \times 10^{17} \approx \boxed{10^{17}\ \text{electrones}} \tag{20}$$

3. **Experimento de Torricelli dentro de un pistón (10 puntos).**

   Un tubo vertical de vidrio, de área transversal $A = 1\,\mathrm{cm}^2$ y cerrado en su parte superior, está sumergido en mercurio. Todo el sistema se encuentra contenido dentro de un cilindro con un pistón móvil, como se muestra en la figura 1. El cilindro, además contiene aire en su interior. La parte superior del tubo de vidrio contiene una cantidad de hidrógeno encerrado. El tubo y el cilindro son impermeables, es decir no dejan entrar ni salir material. Tanto el aire como el hidrógeno y el mercurio se encuentran en contacto térmico, por lo que están a la misma temperatura.

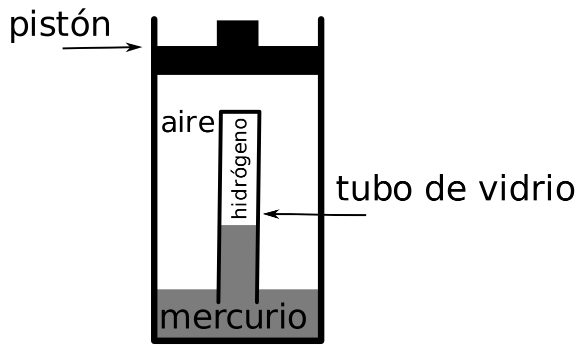
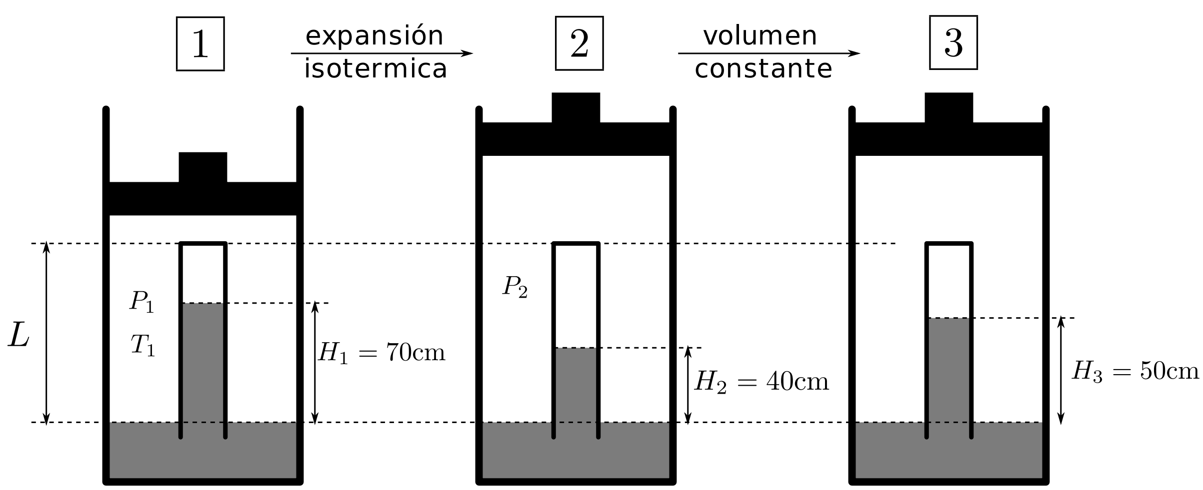


Figura 1

El sistema del tubo y el cilindro pasa por 3 estados de equilibrio a través de dos procesos diferentes, como se muestra en la figura siguiente:



El proceso $\boxed{1} \longrightarrow \boxed{2}$ se trata de una expansión isotérmica.

En el proceso $\boxed{2} \longrightarrow \boxed{3}$ el sistema se calienta manteniendo constante el volumen del aire contenido en el cilindro; nota que el hidrógeno se comprime debido a la expansión térmica del mercurio.

Se conocen los siguientes datos en cada uno de los estados de equilibrio:

$\boxed{1}$

Altura de la columna de mercurio: $H_1 = 70$ cm

Presión del aire dentro del cilindro: $P_1 = 133 \times 10^3$ Pa

Temperatura $T_1 = 273$ K

$\boxed{2}$

Altura de la columna de mercurio: $H_2 = 40$ cm

Presión del aire dentro del cilindro: $P_2 = 8 \times 10^4$ Pa

$\boxed{3}$

Altura de la columna de mercurio: $H_3 = 50$ cm

Constante universal de los gases: $R = 8.314$ J/mol K

Densidad del mercurio: $\rho = 1.36 \times 10^4$ kg/m^3.

Preguntas:

Considerando que el hidrógeno y el aire se comportan como un gas ideal y que el mercurio es incompresible, contesta las siguientes preguntas.

3.1	Cuál es la altura L desde la superficie del mercurio dentro del cilindro, hasta la parte superior del tubo de vidrio.	4 puntos

Respuesta:

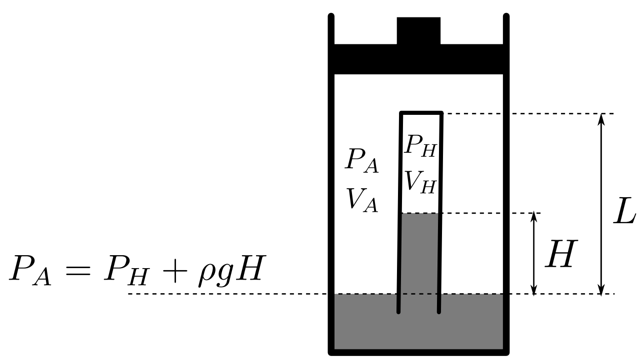


Figura 2

P_H: presión del hidrógeno, V_H: volumen del hidrógeno,

P_A: presión del aire, V_A: volumen del aire,

H: es la altura de la columna de mercurio dentro del tubo, densidad del mercurio: $\rho = 1.36 \times 10^4 \mathrm{kg/m^3}$

La presión en el nivel de la superficie de mercurio corresponde a la del aire, pero por equilibrio hidrostatico:

$$P_A = P_H + \rho g H \tag{21}$$

de donde se obtiene la presión del hidrógeno contenido en la superficie del tubo de hidrógeno:

$$P_H = P_A - \rho g H \tag{22}$$

De la ecuación anterior se obtiene la presión del hidrógeno para cada uno de los estados de equilibrio; para los estados 1 y 2:

$$\begin{aligned} P_{H1} &= P_{A1} - \rho g H_1 = 133 \times 10^3 \text{ Pa} - \left(1.36 \times 10^4 \mathrm{kg/m^3}\right)\left(9.8 \mathrm{m/s^2}\right)(0.7 \text{ m}) = 3.97 \times 10^4 \text{ Pa} \\ P_{H2} &= P_{A2} - \rho g H_2 = 8 \times 10^4 \text{ Pa} - \left(1.36 \times 10^4 \mathrm{kg/m^3}\right)\left(9.8 \mathrm{m/s^2}\right)(0.4 \text{ m}) = 2.67 \times 10^4 \text{ Pa} \end{aligned} \tag{23}$$

El proceso es una expansión isotérmica del aire, pero lo mismo se aplica al hidrógeno por lo que de la ecuación de gas ideal se obtiene:

$$P_{H1} V_{H1} = P_{H2} V_{H2} \tag{24}$$

si L es la longitud del tubo, desde nivel inferior del mercurio hasta la parte superior del tubo (ver figura 2), entonces el volumen del hidrógeno en los estados 1 y 2:

$$\begin{aligned} V_{H1} &= (L - H_1) A \\ V_{H2} &= (L - H_2) A \end{aligned} \tag{25}$$

donde $A = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \mathrm{m}^2$ es el área transversal del tubo de vidrio. Sustituyendo en (24):

$$P_{H1} (L - H_1) A = P_{H2} (L - H_2) A \tag{26}$$

de donde se obtiene la longitud L (sustituyendo los datos):

$$
\begin{aligned}
L = \frac{P_{H1}H_1 - P_{H2}H_2}{P_{H1} - P_{H2}} &= \frac{\left(3.97 \times 10^4 \text{ Pa}\right)(.7 \text{ m}) - \left(2.67 \times 10^4 \text{ Pa}\right)(.4 \text{ m})}{3.97 \times 10^4 \text{ Pa} - 2.67 \times 10^4 \text{ Pa}} \\
&= \frac{(3.97 \text{ Pa})(.7 \text{ m}) - (2.67 \text{ Pa})(.4 \text{ m})}{3.97 \text{ Pa} - 2.67 \text{ Pa}} \\
&= \boxed{1.32 \text{ m} = 132 \text{ cm}}
\end{aligned} \tag{27}
$$

3.2	¿Cuál es la cantidad de hidrógeno contenido en la parte superior del tubo de vidrio, puedes expresar esta cantidad en moles?	2 puntos

Respuesta:

De la ecuación del gas ideal, el número de moles de hidrógeno:

$$
n = \frac{RT_H}{P_H V_H} \tag{28}
$$

Aplicando en el estado $\boxed{1}$:

$V_{H1} = (L - H_1)\, A = (1.32 \text{ m} - 0.7 \text{ m}) \left(10^{-4}\text{m}^2\right) = 6.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

$$
n = \frac{P_{H1}V_{H1}}{RT_1} = \frac{\left(3.97 \times 10^4 \text{ Pa}\right)\left(6.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3\right)}{(8.314 \text{ J/mol K})(273 \text{ K})} = \boxed{1.08 \times 10^{-3} \text{ mol}} \tag{29}
$$

lo mismo se puede hacer, pero en el estado $\boxed{2}$:

$V_{H2} = (L - H_2)\, A = (1.32 \text{ m} - 0.4 \text{ m}) \left(10^{-4}\text{m}^2\right) = 9.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3$

$$
n = \frac{P_{H2}V_{H2}}{RT_2} = \frac{\left(2.67 \times 10^4 \text{ Pa}\right)\left(9.2 \times 10^{-5} \text{ m}^3\right)}{(8.314 \text{ J/mol K})(273 \text{ K})} = \boxed{1.08 \times 10^{-3} \text{ mol}} \tag{30}
$$

obteniendo el mismo resultado como era de esperar (si el hidrogenoes diatomico, esto resulta en una masa de 2×10^{-6} kg).

3.3	¿Cuál es la temperatura final T_3 en el estado $\boxed{3}$?	4 puntos

Respuesta:

Durante el proceso $\boxed{2} \longrightarrow \boxed{3}$, el aire dentro del cilindro se calienta a volumen constante por lo tanto:

$$
\frac{P_{A2}}{T_2} = \frac{P_{A3}}{T_3}, \quad \Rightarrow \; P_{A3} = P_{A2}\frac{T_3}{T_2} \tag{31}
$$

pero de la ecuación (22) se obtiene la presión del hidrógeno:

$$P_{H3} = P_{A3} - \rho g H_3 \tag{32}$$

despejando P_{A3} y sutituyendo en (31):

$$P_{H3} + \rho g H_3 = P_{A2}\frac{T_3}{T_2}; \quad \Rightarrow\ T_3 = \frac{T_2}{P_{A2}}\left(P_{H3} + \rho g H_3\right) \tag{33}$$

Para determinar T_3 completamente es necesario conocer P_{H3}, que se obtiene de la ecuación del gas ideal al estado 3 del hidrógeno:

$$P_{H3}V_{H3} = nRT_3, \quad \Rightarrow\ P_{H3} = \frac{nRT_3}{V_{H3}} \tag{34}$$

sustituyendo esta expresión en (33) se obtiene:

$$T_3 = \frac{T_2}{P_{A2}}\left(\frac{nRT_3}{V_{H3}} + \rho g H_3\right) \tag{35}$$

finalmente se despeja T_3:

$$T_3 = \frac{\rho g H_3}{\dfrac{P_{A2}}{T_2} - \dfrac{nR}{V_{H3}}} \tag{36}$$

sustituyendo valores:

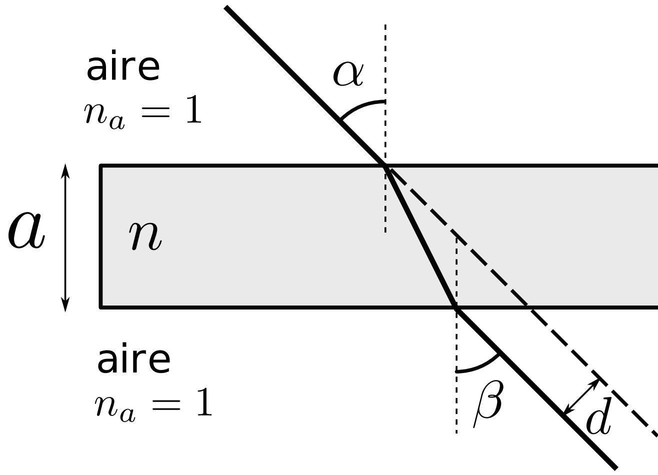
$V_{H3} = (L - H_3)\,A = (1.32\text{ m} - 0.5\text{ m})\left(10^{-4}\text{m}^2\right) = 8.2 \times 10^{-5}\text{ m}^3$

$\rho h H_3 = \left(1.36 \times 10^4\text{kg/m}^3\right)\left(9.8\text{m/s}^2\right)(0.5\text{ m}) = 6.66 \times 10^4\text{ Pa}$

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{6.66 \times 10^4\text{ Pa}}{\dfrac{8 \times 10^4\text{ Pa}}{273\text{ K}} - \dfrac{\left(1.08 \times 10^{-3}\text{ mol}\right)(8.314\text{ J/mol K})}{8.2 \times 10^{-5}\text{ m}^3}} \\ &= \frac{6.66 \times 10^4\text{ Pa}}{293.04 - 109.5}\text{ K} \\ &= \boxed{362.86\text{ K}} \end{aligned} \tag{37}$$

4. **Óptica geométrica (5 puntos).**

Un haz de luz que se propaga en el aire incide sobre la cara superior de una placa de grosor a y cuyo material tiene índice de refracción n. El haz incide con un ángulo α (ver figura) con respecto a la normal al vidrio. El haz de luz se refracta en la placa y emerge de nuevo al aire por debajo de la placa con un ángulo β respecto de la vertical.



$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) &= \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\
\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Preguntas:

4.1	Muestra que el haz que sale por debajo de la placa es paralelo al haz que incide por arriba de la placa, es decir muestra que: $\beta = \alpha$.	1 punto

Respuesta:

De la ley de Snell en la cara superior e inferior se obtiene:

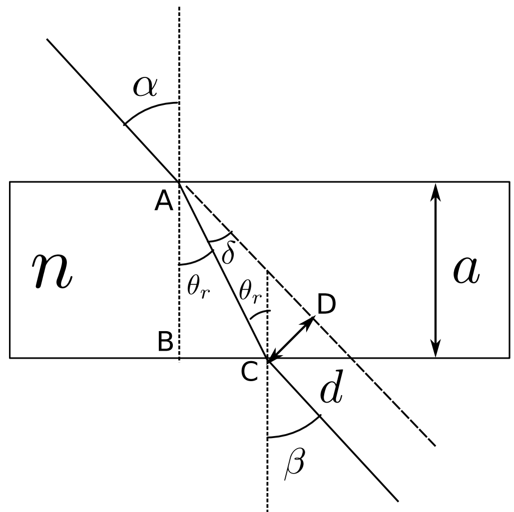
$$
\begin{aligned}
n_a \operatorname{sen}\alpha &= n \operatorname{sen}\theta_r \\
n \operatorname{sen}\theta_r &= n_a \operatorname{sen}\beta
\end{aligned}
\tag{39}
$$

de donde

$$
\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta, \quad \alpha = \beta}
\tag{40}
$$

4.2	Calcula la distancia d que separa los dos haces de luz, el de incidencia y el que sale por debajo de la placa en términos de solamente el ángulo de incidencia α, el índice de refracción n y el grosor de la placa a.	2 puntos

Respuesta:



De los triangulo ABC y ACD (ver figura) se obtienen las siguientes selaciones trigonometricas:

$$\begin{aligned} \cos\theta_r &= \frac{AB}{AC} = \frac{a}{AC} \\ \operatorname{sen}\delta &= \frac{CD}{AC} = \frac{d}{AC} \end{aligned} \tag{41}$$

dividiendo ambas ecuaciones:

$$d = a\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\theta_r} \tag{42}$$

De los ángulos opuestos en el vértice A, se tiene que: $\alpha = \theta_r + \delta$, es decir $\delta = \alpha - \theta_r$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} d &= a\frac{\operatorname{sen}\delta}{\cos\theta_r} = a\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\theta_r)}{\cos\theta_r} \\ &= a\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\theta_r - \operatorname{sen}\theta_r\cos\alpha}{\cos\theta_r} \\ &= a\left(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\theta_r\frac{\cos\alpha}{\cos\theta_r}\right) \end{aligned} \tag{43}$$

de la ley de Snell se tiene que $\operatorname{sen}\theta_r = \frac{n_a}{n}\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha$ ($n_a = 1$), sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} d &= a\left(\operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha\frac{\cos\alpha}{\cos\theta_r}\right) \\ &= a\operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos\alpha}{\cos\theta_r}\right) \end{aligned} \tag{44}$$

usando la relación trigonometrica $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, entonces:

$$\cos\theta_r = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta_r} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha\right)^2} \tag{45}$$

sustituyendo en (44) se obtiene:

$$\boxed{\begin{aligned} d &= a\operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\operatorname{sen}\alpha\right)^2}}\right) \\ &= a\operatorname{sen}\alpha\left(1 - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \operatorname{sen}^2\alpha}}\right) \end{aligned}} \tag{46}$$

4.3	Si el ángulo de incidencia es $\alpha = 45° = \frac{\pi}{4}$ radianes, calcula el valor del índice de refracción de la placa n para el cual la distancia de separación entre los haces es la misma que el grosor de la placa, es decir para $a = d$.	2 puntos

Respuesta:

sabemos que $\operatorname{sen} 45 = \cos 45 = 1/\sqrt{2} = 0.7$, sustituyendo en el resultado del inciso anterior con $a = d$, $n_a = 1$:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 - 1/2}}\right) \tag{47}$$

resolviendo para n:

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-1/2}} &= \sqrt{2} \\
\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{n^2-1/2}} &= 1-\sqrt{2} \\
\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2-1/2}\right) &= \left(1-\sqrt{2}\right)^2 \\
n^2-1/2 &= \frac{1}{2\left(1-\sqrt{2}\right)^2} \\
n^2 &= \frac{1}{2\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{2} \\
\Rightarrow & \boxed{n=\sqrt{\frac{1}{2\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\frac{1}{2}}=1.85}
\end{aligned}
\tag{48}
$$

XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Durango 17-21 de noviembre de 2013
Prueba experimental

Indice de refracción del vidrio por el método de Pfund (20 puntos)

El índice de refracción es el causante de que la luz se *refracte* al pasar por un material transparente, es decir, que los rayos de luz se desvíen con respecto al ángulo al que entran al material.

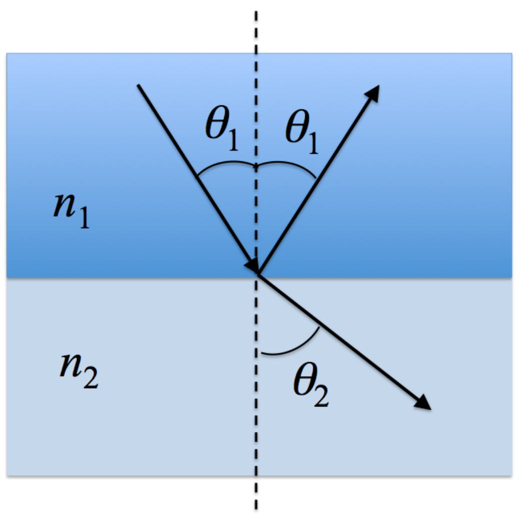


Figura 1: Ley de Snell

En la figura 1 se muestra dicho fenómeno al pasar un rayo de luz de un material (1) a otro material (2). Sean n_1 y n_2 a los índices de refracción de dichos materiales. Llamemos θ_1 al ángulo que hace el rayo incidente con respecto a la vertical en el material (1). A llegar al medio (2) parte de la luz se *refleja* con el mismo ángulo θ_1, pero la parte que se trasmite al medio (2) se *refracta*, es decir, cambia su dirección al ángulo θ_2, medido con respecto a la vertical. Estos ángulos están relacionados entre sí por la Ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

Note que θ_1 es mayor o menor que θ_2 dependiendo si n_1 es menor o mayor a n_2. Existe un caso muy importante que es cuando $n_1 > n_2$ y la luz pasa de (1) a (2). Por la Ley de Snell hallamos que existe un ángulo crítico de incidencia $\theta_1 = \theta_c$ tal que $\theta_2 = \pi/2$. El ángulo crítico sólo depende n_1 y n_2:

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Por lo tanto, si el ángulo de incidencia θ_1 es mayor que el crítico $\theta_1 > \theta_c$, la luz *sólo* se refleja en el medio (1) y nada se trasmite. A este fenómeno se le llama *reflexión total interna*

En este problema determinaremos el índice de refracción del vidrio usando el concepto de la reflexión total interna.

MATERIAL

1. Una fuente de luz láser (rojo). CUIDADO! No vea directamente al láser!

2. Cuatro (4) placas de vidrio de diferente grosor. Llame (I), (II), (III) y (IV) a los vidrios en orden ascendente de grosor, es decir, (I) es el más delgado y (IV) el más grueso.

3. Un recipiente de plástico.

4. Una botella de agua.

5. Servilletas de papel.

6. Hojas milimétricas.

7. Regla y vernier.

8. Lápices, borrador y goma.

PREPARACION

Antes de iniciar las mediciones es importante familiarizarse con el fenómeno.

Primero, coloque una hoja de papel milimétrico en su mesa. Prenda el láser y hágalo incidir verticalmente sobre la hoja desde unos 15 a 20 cm de altura. El láser produce una “mancha” roja, llamada *spot*, sobre el papel. El ancho del spot es de unos cuantos milímetros. Note que usted puede ver el spot desde cualquier ángulo de observación. Esto se debe a que el papel tiene una gran cantidad de rugosidades pequeñas que, aunque no son visibles para nosotros, sí son suficientes para dispersar la luz en todas direcciones, y por eso podemos ver el spot desde cualquier ángulo. Esta explicación se aplica a cualquier superficie iluminada, ya sea por un láser, una lámpara o cualquier fuente de luz: es la dispersión por la superficie en todas direcciones, de la luz incidente, la que permite su observación.

Ahora coloque un vidrio encima del papel milimétrico y haga incidir el láser sobre la superficie del vidrio. Observará, además del spot, una mancha circular roja más grande que el spot, pero menos intensa. Vea la Figura 2. Repita este procedimiento con las cuatro placas de vidrio. El diámetro D de la mancha grande depende del grosor H de la placa de vidrio. En algunos casos podra observar otra u otras manchas más grandes, pero más tenues. Ignórelas por el momento. *Sugerencia para el problema:* la mancha que usted se ve, se forma en el papel.

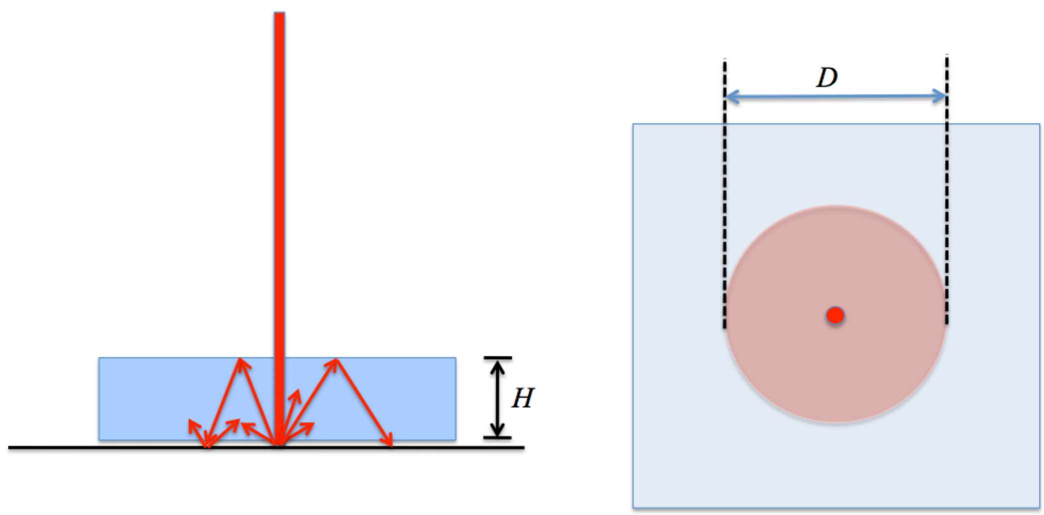


Figura 2: Esquema del láser incidiendo sobre una placa de vidrio de grosor H. Note que se forma un círculo rojo de diámetro D. La mancha central de unos cuantos milímetros es el *spot* del láser.

Como veremos más adelante, la relación entre el diámetro D de la mancha, el ancho H y los índices de refracción son,

$$\frac{n}{n_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{D}\right)^2} \tag{1}$$

donde n es el índice de refracción del vidrio y n_0 el del aire. Usted usará esta fórmula para determinar n. Sin embargo, es importante llegar a un entendimiento del fenómeno lo mejor posible.

E.1	**Tarea 1:** Deduzca la fórmula dada por la ecuación (1). Explique su razonamiento. Un aspecto muy importante a considerar es el hecho que entre el vidrio y el papel, en la cara inferior de vidrio, existe una capa muy delgada de aire, que debe tomarse en cuenta. Vea la Figura 2. *Sugerencia:* continúe con el resto del problema y regrese a esta pregunta al final del examen.	2 puntos

E.2	**Tarea 2:** Mida los anchos H de las 4 placas de vidrio con el vernier. Repórtelas en la Tabla, incluyendo sus incertidumbres. Recuerde usar la numeración (I) a (IV) en orden ascendente de grosor.	1 punto

E.3	**Tarea 3:** Para cada placa, mida el ancho D de la mancha circular roja y repórtela en la Tabla en la columna apropiada. Incluya las incertidumbres de las mediciones.	3 puntos

Para un análisis experimental apropiado los datos anteriores no son suficientes. Es decir, sería ideal tener mas placas de vidrios de diferentes grosores. Esto lo podríamos lograr apilando las diferentes placas. Sin embargo, esto no es tan sencillo como veremos a continuación.

E.4	**Tarea 4:** Coloque la placa (III) sobre el papel y póngale encima la placa (IV). Observe lo que ocurre. Después, coloque la placa (IV) sobre el papel y encima de ella coloque la (III). Observe lo que ocurre. Con base en las mediciones de las Tareas 2 y 3, y sus observacioes, conteste la pregunta: ¿es posible considerar a las placas apiladas como si fuera una sóla placa cuyo grosor fuera la suma de los grosores de las placas? Explique de manera detallada su respuesta.	2 puntos

E.5	**Tarea 5:** El siguiente procedimiento sí garantiza que se puedan apilar placas para formar una más gruesa: llene el recipiente de plástico con agua hasta un poco mas de la mitad. Sumerja dos placas de vidrio y júntelas bajo el agua, de tal manera que quede una delgada capa de agua entre las placas. Sáque las dos placas con cuidado, evitando que se separen y seque muy bien las dos superficies de vidrio que quedan expuestas al aire. Coloque a las placas apiladas sobre el papel milimétrico y haga incidir el láser. Verifique que lo que observa no depende de cuál placa quede sobre el papel. Mida el ancho D de la mancha observada. Mida el valor H del grosor de las dos placas apiladas. Repita este procedimiento apilando diferentes placas e indique cuáles apiló. Puede apilar hasta tres placas. Por razones de seguridad, no apile las cuatro placas. Reporte sus mediciones en la Tabla.	5 puntos

E.6	**Tarea 6:** Con los resultados de su Tabla y la fórmula (1) realice un análisis gráfico para obtener el valor del índice de refracción n del vidrio, así como su incertidumbre. Use $n_0 = 1$ como índice de refracción del aire.	5 puntos

E.7	**Tarea 7:** Usando el hecho de que el índice de refracción del agua es $n_W = 1.33$, explique por qué el procedimiento de la Tarea 5 sí permite considerar a las placas apiladas como una sóla placa de grosor igual a la suma de ellas, siempre que tengan una capa delgada de agua entre ellas,	2 puntos

TABLA

	D	H	
I			
II			
III			
IV			

XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Durango 17-21 de noviembre de 2013
Prueba experimental

Indice de refracción del vidrio por el método de Pfund **(20 puntos)**

El índice de refracción es el causante de que la luz se *refracte* al pasar por un material transparente, es decir, que los rayos de luz se desvíen con respecto al ángulo al que entran al material.

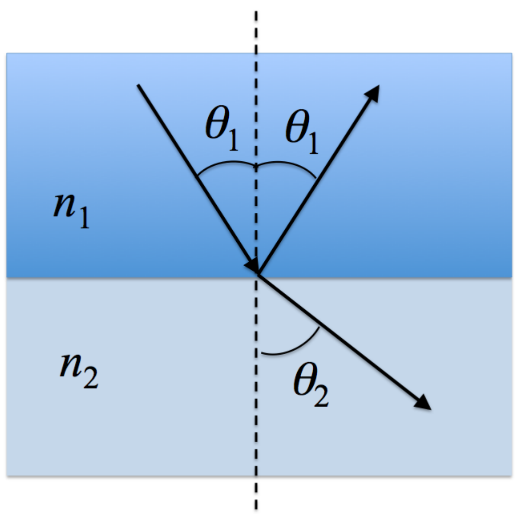


Figura 1: Ley de Snell

En la figura 1 se muestra dicho fenómeno al pasar un rayo de luz de un material (1) a otro material (2). Sean n_1 y n_2 a los índices de refracción de dichos materiales. Llamemos θ_1 al ángulo que hace el rayo incidente con respecto a la vertical en el material (1). A llegar al medio (2) parte de la luz se *refleja* con el mismo ángulo θ_1, pero la parte que se trasmite al medio (2) se *refracta*, es decir, cambia su dirección al ángulo θ_2, medido con respecto a la vertical. Estos ángulos están relacionados entre sí por la Ley de Snell:

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$$

Note que θ_1 es mayor o menor que θ_2 dependiendo si n_1 es menor o mayor a n_2. Existe un caso muy importante que es cuando $n_1 > n_2$ y la luz pasa de (1) a (2). Por la Ley de Snell hallamos que existe un ángulo crítico de incidencia $\theta_1 = \theta_c$ tal que $\theta_2 = \pi/2$. El ángulo crítico sólo depende n_1 y n_2:

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Por lo tanto, si el ángulo de incidencia θ_1 es mayor que el crítico $\theta_1 > \theta_c$, la luz *sólo* se refleja en el medio (1) y nada se trasmite. A este fenómeno se le llama *reflexión total interna*

En este problema determinaremos el índice de refracción del vidrio usando el concepto de la reflexión total interna.

MATERIAL

1. Una fuente de luz láser (rojo). CUIDADO! No vea directamente al láser!

2. Cuatro (4) placas de vidrio de diferente grosor. Llame (I), (II), (III) y (IV) a los vidrios en orden ascendente de grosor, es decir, (I) es el más delgado y (IV) el más grueso.

3. Un recipiente de plástico.

4. Una botella de agua.

5. Servilletas de papel.

6. Hojas milimétricas.

7. Regla y vernier.

8. Lápices, borrador y goma.

PREPARACION

Antes de iniciar las mediciones es importante familiarizarse con el fenómeno.

Primero, coloque una hoja de papel milimétrico en su mesa. Prenda el láser y hágalo incidir verticalmente sobre la hoja desde unos 15 a 20 cm de altura. El láser produce una "mancha" roja, llamada *spot*, sobre el papel. El ancho del spot es de unos cuantos milímetros. Note que usted puede ver el spot desde cualquier ángulo de observación. Esto se debe a que el papel tiene una gran cantidad de rugosidades pequeñas que, aunque no son visibles para nosotros, sí son suficientes para dispersar la luz en todas direcciones, y por eso podemos ver el spot desde cualquier ángulo. Esta explicación se aplica a cualquier superficie iluminada, ya sea por un láser, una lámpara o cualquier fuente de luz: es la dispersión por la superficie en todas direcciones, de la luz incidente, la que permite su observación.

Ahora coloque un vidrio encima del papel milimétrico y haga incidir el láser sobre la superficie del vidrio. Observará, además del spot, una mancha circular roja más grande que el spot, pero menos intensa. Vea la Figura 2. Repita este procedimiento con las cuatro placas de vidrio. El diámetro D de la mancha grande depende del grosor H de la placa de vidrio. En algunos casos podra observar otra u otras manchas más grandes, pero más tenues. Ignórelas por el momento. *Sugerencia para el problema:* la mancha que usted se ve, se forma en el papel.

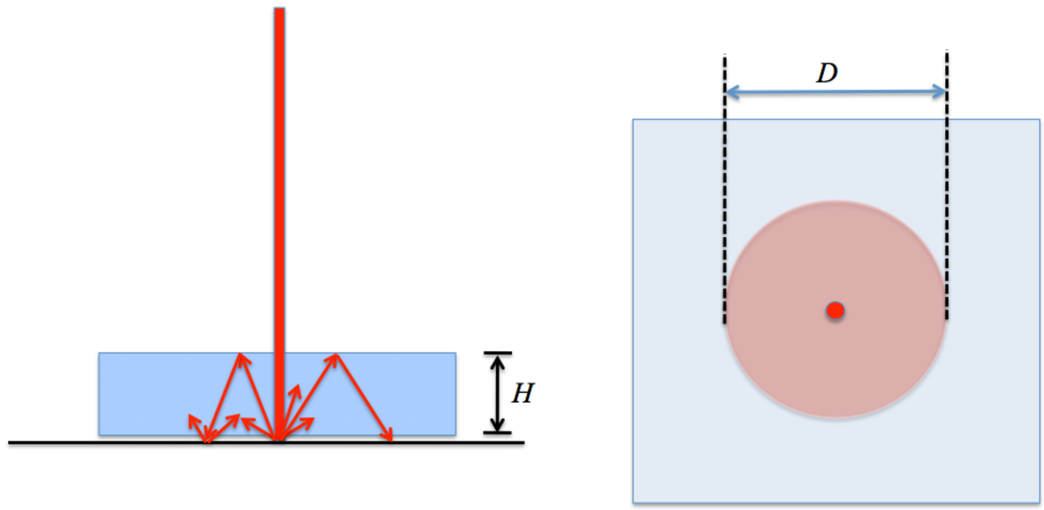


Figura 2: Esquema del láser incidiendo sobre una placa de vidrio de grosor H. Note que se forma un círculo rojo de diámetro D. La mancha central de unos cuantos milímetros es el *spot* del láser.

Como veremos más adelante, la relación entre el diámetro D de la mancha, el ancho H y los índices de refracción son,

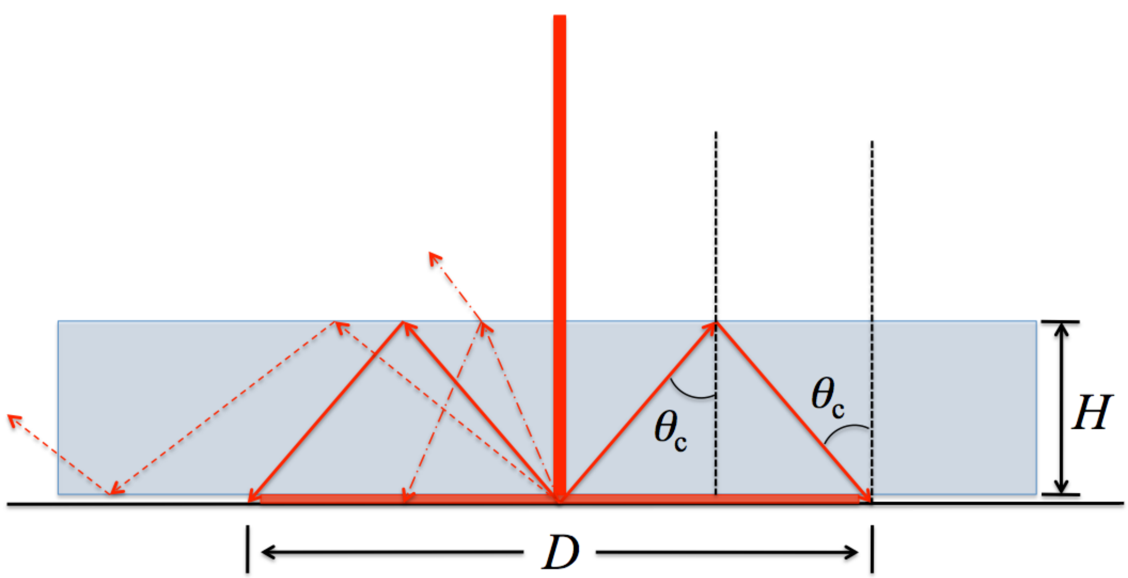
$$\frac{n}{n_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{D}\right)^2} \tag{1}$$

donde n es el índice de refracción del vidrio y n_0 el del aire. Usted usará esta fórmula para determinar n. Sin embargo, es importante llegar a un entendimiento del fenómeno lo mejor posible.

E.1	**Tarea 1:** Deduzca la fórmula dada por la ecuación (1). Explique su razonamiento. Un aspecto muy importante a considerar es el hecho que entre el vidrio y el papel, en la cara inferior de vidrio, existe una capa muy delgada de aire, que debe tomarse en cuenta. Vea la Figura 2. *Sugerencia:* continúe con el resto del problema y regrese a esta pregunta al final del examen.	2 puntos

Solución:
Es importante entender que la mancha roja se forma en el papel porque está siendo iluminada por el láser, de manera indirecta, debido al vidrio. Es decir, el láser incide verticalmente y del spot se dispersa luz en todas direcciones. Esos rayos entran al vidrio, llegan a la parte superior y se reflejan, y una parte se refracta al aire. El rayo reflejado regresa a la parte inferior del vidrio, donde de nuevo se refleja, pero también se refracta, de nuevo a la pequeña capa de aire entre el vidrio y el papel. Lo que ser logra refractar ilumina al papel, pero esto sólo lo puede hacer si llega a un ángulo menor o igual al crítical crítico, $\theta \leq \theta_c$. Este ángulo de llegada al fondo del vidrio es el mismo con el que se refleja en la parte superior. Sin embargo, si llega primero a la parte de arriba con un ángulo mayor al crítico, $\theta > \theta_c$, ya no se trasmitirá, se reflejará y llegará con el mismo ángulo al fondo, y de nuevo, no se refractará y ya no iluminará al papel!

Por lo tanto, sólo los rayos que lleguen a la parte de arriba con $\theta \leq \theta_c$, llegarán abajo con el mismo ángulo e iluminarán el papel. Vea la figura:



En la figura el rayo "línea-punto-línea" va a un ángulo menor al crítico, $\theta < \theta_c$, por lo tanto, en la parte inferior se trasmite e ilumina al papel. El rayo con la "línea punteada" va a un ángulo mayor al crítico, $\theta > \theta_c$, y ya no se trasmite, no ilumina al papel. El borde es el que va al ángulo crítico $\theta = \theta_c$. Este delimita la región iluminada en el papel de diámetro D. Por simple trigonometría:

$$\tan\theta_c = \frac{D}{4H}$$

Ahora usamos una identidad trigonométrica para expresar la tangente en términos del seno:

$$\operatorname{sen}\theta_c = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2\theta_c}}$$

sustituyendo,

$$\operatorname{sen}\theta_c = \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{D}\right)^2}$$

que usando la fórmula del ángulo crítco, $n/n_0 = \operatorname{sen}\theta_c$, nos da el resultado buscado,

$$\frac{n}{n_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{D}\right)^2}$$

con n el índice de refracción del vidrio y n_0 el del aire.

Se dará 1 punto por la explicación correcta y 1 punto por la deducción matemática de la fórmula.

E.2	**Tarea 2:** Mida los anchos H de las 4 placas de vidrio con el vernier. Repórtelas en la Tabla, incluyendo sus incertidumbres. Recuerde usar la numeración (I) a (IV) en orden ascendente de grosor.	1 punto

Solución:
Este ejercicio es muy sencillo, sin embargo, algunos no sabrán usar el vernier por lo que se aceptará que den el resultado en milímetros. Si usan el vernier la incertidumbre debe ser 0.05 mm. Esto no será muy importante pues el error está en la medición de D. Se dará 0.25 puntos por vidrio bien medido. Se aceptará cualquier incertidumbre menor o igual a 0.5 mm. Si no dan incertidumbre o la dan por arriba de 0.5 mm, se penalizará con 0.1 puntos por error.

TABLA

	D /mm	H /mm	
I	8±1	2.0±0.05	
II	12±1	3.0±0.05	
III	22±1	6.0±0.05	
IV	32±1	9.5±0.05	
I+II	18±1	5.0±0.1	
I+III	28±1	8.0±0.1	
I+IV	40±1	11.5±0.1	
II+III	30±1	9.0±0.1	
II+IV	44±2	12.5±0.1	
III+IV	56±2	15.5±0.05	
II+III+IV	68±2	18.5±0.1	

E.3	**Tarea 3:** Para cada placa, mida el ancho D de la mancha circular roja y repórtela en la Tabla en la columna apropiada. Incluya las incertidumbres de las mediciones.	3 puntos

Solución:
Este ejercicio también es sencillo, sin embargo, la dificultad está en tener buena vista y contar los cuadritos del papel milimétrico y estimar la incertidumbre. Por cada medición correcta de D se dará 0.5 puntos. Se dará 0.25 por cada incertidumbre. Esta debe estar entre 1 mm y 2 mm. Si dan menos de 1 mm o mas de 2 mm, sólo se dará 0.1 puntos.

Para un análisis experimental apropiado los datos anteriores no son suficientes. Es decir, sería ideal tener mas placas de vidrios de diferentes grosores. Esto lo podríamos lograr apilando las diferentes placas. Sin embargo, esto no es tan sencillo como veremos a continuación.

E.4	**Tarea 4:** Coloque la placa (III) sobre el papel y póngale encima la placa (IV). Observe lo que ocurre. Después, coloque la placa (IV) sobre el papel y encima de ella coloque la (III). Observe lo que ocurre. Con base en las mediciones de las Tareas 2 y 3, y sus observacioes, conteste la pregunta: ¿es posible considerar a las placas apiladas como si fuera una sóla placa cuyo grosor fuera la suma de los grosores de las placas? Explique de manera detallada su respuesta.	2 puntos

Solución:
Deben reportar que no es posible considerar a las placas apiladas como si fueran una sóla, cuyo grosor corresponda a la suma de los grosores de las dos placas. Esto se debe a que no se observa lo mismo si ponen (III) abajo y (IV) arriba, o si ponen (IV) abajo y (III) arriba. Se observa que el tamaño de D es el de la placa de abajo. Si sólo concluyen que no es posible pero sin ninguna explicación, 0 puntos. Si concluyen que no debido a que se ven diferentes, pero no lo cuantifican, 1 punto. Si lo cuantifican, es decir, que se dan cuenta que lo que se observa es el ancho D de la de abajo, los 2 puntos.

E.5	**Tarea 5:** El siguiente procedimiento sí garantiza que se puedan apilar placas para formar una más gruesa: llene el recipiente de plástico con agua hasta un poco mas de la mitad. Sumerja dos placas de vidrio y júntelas bajo el agua, de tal manera que quede una delgada capa de agua entre las placas. Sáque las dos placas con cuidado, evitando que se separen y seque muy bien las dos superficies de vidrio que quedan expuestas al aire. Coloque a las placas apiladas sobre el papel milimétrico y haga incidir el láser. Verifique que lo que observa no depende de cuál placa quede sobre el papel. Mida el ancho D de la mancha observada. Mida el valor H del grosor de las dos placas apiladas. Repita este procedimiento apilando diferentes placas e indique cuáles apiló. Puede apilar hasta tres placas. Por razones de seguridad, no apile las cuatro placas. Reporte sus mediciones en la Tabla.	5 puntos

Solución:
Esta es la parte experimental más complicada. Deben lograr un buen contacto entre los vidrios, secarlos bien y hacer las mediciones de manera correcta. Con dos y tres placas, de cuatro, se pueden hacer 9 combinaciones diferentes. Se espera que hagan al menos 6. Si hacen 5 mediciones, se castigará con 1 punto el total obtenido. Si hacen menos de 5, se sumarán los puntos obtenidos y del total se restará 0.5 puntos. Por cada medición de un par D y H correctos, incluidas las incertidumbre, se otorgará un 1 punto (máximo 5). Se restará 0.2 puntos por medición incorrecta de D o H. Para saber si D está fuera de rango, usar la fórmula (1) con $n = 1.50$. Se restará 0.1 puntos por cada incertidumbre fuera de rango. (VER CRITERIO DE INCERTIDUMBRE en TAREAS 2 y 3).

E.6	**Tarea 6:** Con los resultados de su Tabla y la fórmula (1) realice un análisis gráfico para obtener el valor del índice de refracción n del vidrio, así como su incertidumbre. Use $n_0 = 1$ como índice de refracción del aire.	5 puntos

Solución:
Esta es esencial de una prueba experimental. Se espera que se den cuenta que la fórmula (1) puede transformarse a una recta:

$$\frac{n}{n_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{4H}{D}\right)^2}$$

de aqui

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = 1 + \left(\frac{4H}{D}\right)^2$$

y luego,

$$D = \frac{4}{\sqrt{\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 - 1}} H$$

que es una recta $y = mx + b$, con $y = D$, $x = H$, $b = 0$, y pendiente $m = 4/((n/n_0)^2 - 1)^{1/2}$. Con los datos de la Tabla se debe realizar una gráfica y obtener la pendiente m, de donde se calcula el índice de refracción n,

$$n = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{m}\right)^2} \tag{2}$$

El análisis matemático en sí dará 1 punto. Se calificará la calidad de la gráfica con 2 puntos. El obtener la pendiente m y el valor de n, 1.25 punto. Se otorgará 0.5 puntos si el índice obtenido está entre 1.40 y 1.60. Se otorgarán 0.25 puntos por la incertidumbre.

CRITERIOS de GRAFICA.

1. Uso amplio del papel y escala adecuada, 0.5 puntos
2. Ejes con graduación (0.25) y etiquetas con unidades (0.25)
3. Puntos bien gráficados, los mismos que la tabla o menos si son 8 a 10 ... 0.5 puntos, penalizar con 0.1 si son menos de 8 puntos graficados.
4. Trazo de recta aceptable, 0.5

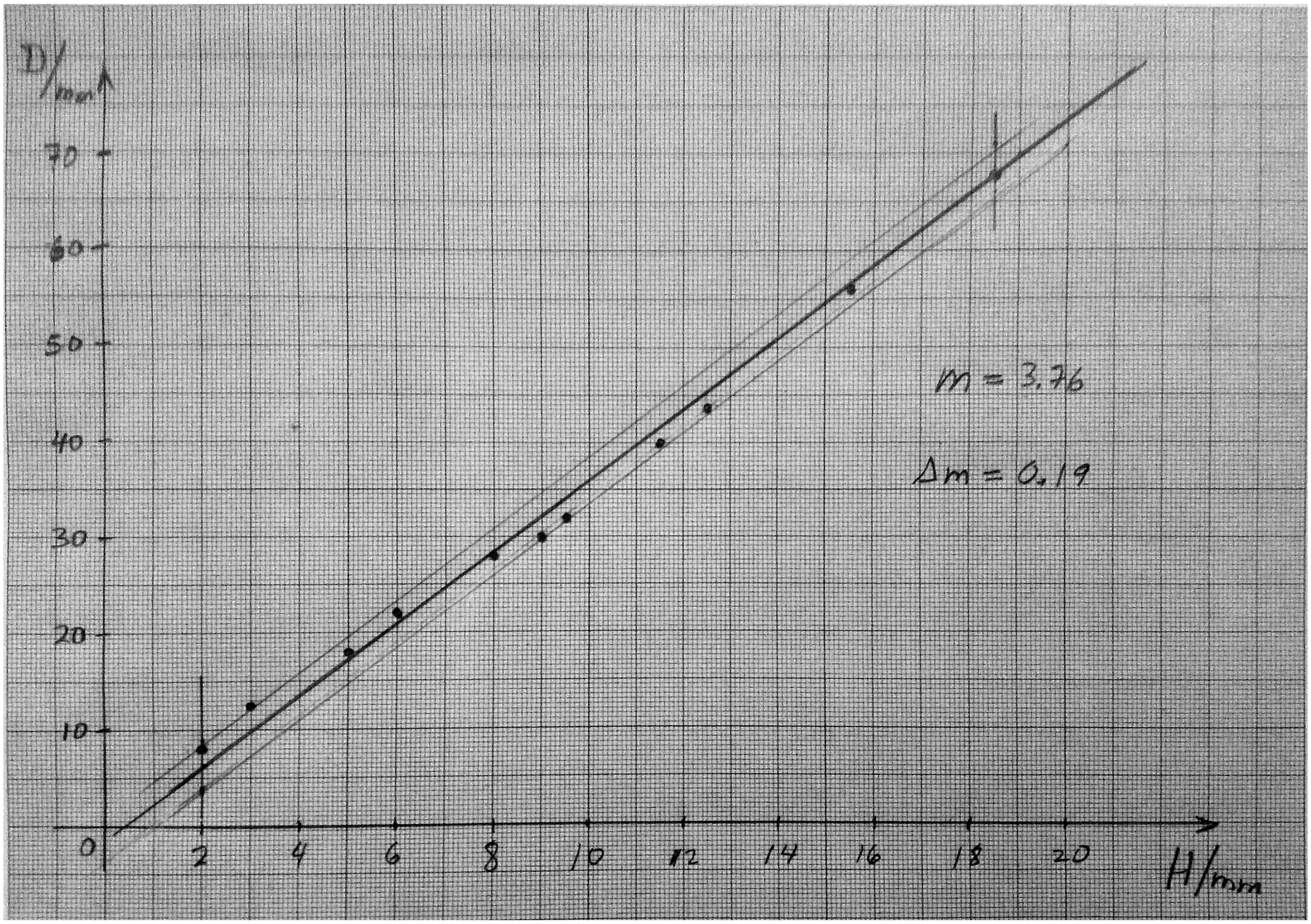
De la gráfica ejemplo, se obtuvo la pendiente $m = 3.76$. Sustituyendo en la fórmula (2) se tiene el índice de refracción $n = 1.46$. La incertidumbre de la pendiente se obtiene usando el análisis gráfico con la diferencia de pendientes extremas (entre 2):

$$\Delta m = \frac{m_{alta} - m_{baja}}{2} = 0.19$$

La incertidumbre de n se obtiene de la fórmula de la derivada:

$$\Delta n = |\frac{dn}{dm}|\Delta m = 0.05$$

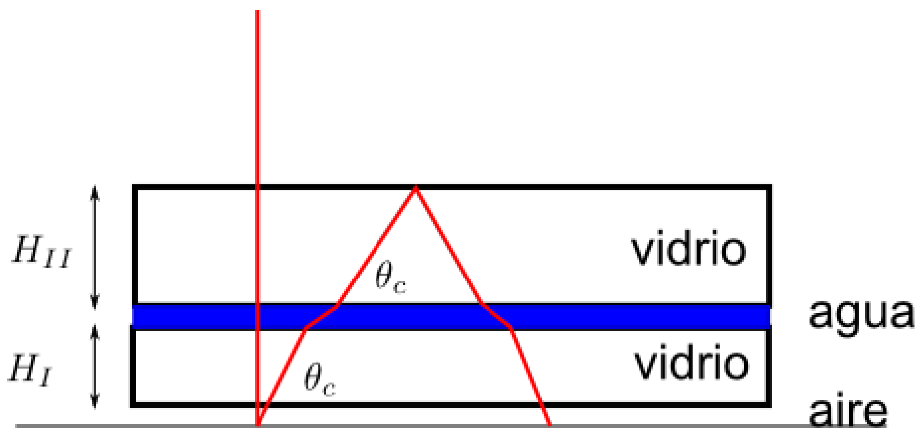
hallándose $m = 1.46 \pm 0.05$.


D/mm
70
60
50
40
30
20
10
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
H/mm
m = 3.76
Δm = 0.19

E.7	**Tarea 7:** Usando el hecho de que el índice de refracción del agua es $n_W = 1.33$, explique por qué el procedimiento de la Tarea 5 sí permite considerar a las placas apiladas como una sóla placa de grosor igual a la suma de ellas, siempre que tengan una capa delgada de agua entre ellas,	2 puntos

Solución:

La explicación es que el al ángulo crítico entre vidrio y aire, el rayo sí pasa al agua y luego de nuevo al vidrio. Esto se debe a que aunque hay un ángulo crítico entre vidrio y agua, este es mayor que entre vidrio y aire. Por lo tanto, la capa de agua se "comporta" como vidrio para ángulos ángulos menores o iguales al ángulo crítico entre vidrio y aire. El resultado es que la luz pasa entre los dos vidrios como si fuera sólo uno de ancho igual a la suma de los anchos de los vidrios $H = H_1 + H_2$ y, por lo tanto, el diámetro D de la mancha iluminada corresponde a ese grosor H. Esto se ilustra en la figura. Este problema es importante para ver que entienden el concepto de reflexión total interna, que es la física atrás del experimento, y no tan sólo están siguiendo instrucciones.La explicación correcta dará 2 puntos. Se dejará a criterio de los evaluadores otorgar crédito parcial dependiendo de los que se conteste.



XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Durango 17-21 de noviembre de 2013
Prueba teórica

Problema 1 Densidad del Sol	**(10 puntos)**

Uno de los experimentos más importantes de la física se remonta al año 1797 en el que Henry Cavendish logró medir experimentalmente la fuerza gravitacional entre dos esferas metálicas a través de un dispositivo llamado balanza de torsión. Con este experimento Cavendish logró medir la constante gravitacional, cuyo valor reportado actualmente es: $G = 6.7 \times 10^{-11} \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$. Al medir la constante gravitacional, Cavendish pudo determinar la masa de la Tierra! Una vez medida la masa de la Tierra, una pregunta nos salta: ¿cuál es la masa del Sol?

1.1	**Pregunta:** Si la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita circular de radio $d = 150 \times 10^6$ km, determina una expresión para calcular la masa del Sol y calcula su valor con los datos de que dispones.	3 puntos

A continuación se propone un experimento muy sencillo a partir del cual se puede medir la densidad del Sol y que no necesita el conocimiento de la distancia Tierra-Sol.

Cuando se hace pasar la luz del sol a través de un pequeño orificio, por ejemplo el que se puede hacer con una aguja sobre una hoja de papel, es posible proyectar una imagen luminosa del Sol sobre una superficie más oscura tal como se muestra en la figura 1.

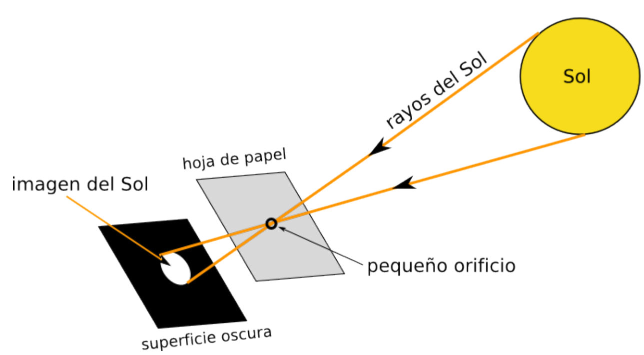


Figura 1: Proyección de Sol a través de pequeño orificio.

Para determinar la densidad del Sol a través de este experimento, en la figura 2 se hace un esquema del experimento con los parámetros geométricos involucrados: D_s es el diámetro del sol y D_i es el diámetro de la imagen del Sol que se proyecta sobre alguna superficie (la misma superficie oscura que se muestra en la figura 1), d es la distancia perpendicular desde el orificio hasta el Sol, que para fines prácticos corresponde a la distancia Tierra-Sol, mientras que L es la distancia perpendicular desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol y θ es el ángulo de paralaje que tiene su vértice en el orificio y tiene como rectas los rayos del Sol que pasan a través el orificio.

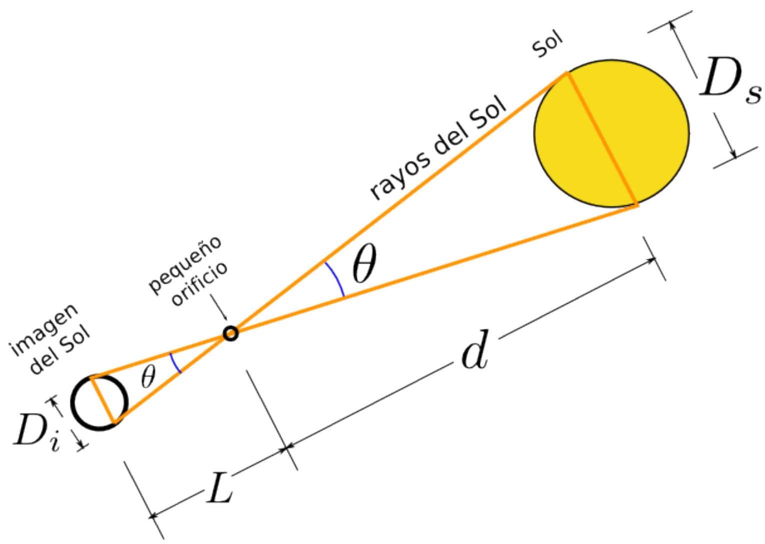


Figura 2: Parámetros geométricos de la imagen del Sol cuando pasa a través de un orificio.

Debes notar que la distancia Tierra-Sol d es mucho mayor que el diámetro del Sol D_s, de la misma manera se debe procurar que la distancia L, desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol debe ser mucho mayor que el diámetro de la imagen proyectada del Sol D_i

$$d \gg D_s \qquad\qquad L \gg D_i \tag{1}$$

Esto significa que el ángulo de paralaje θ es muy pequeño. Para ángulos pequeños se pueden hacer las siguientes aproximaciones de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{2}$$

1.2	Usando la figura 2 determina una expresión para calcular el diámetro del Sol D_s en términos del ángulo de paralaje θ y la distancia Tierra-Sol d. Haz lo mismo con el diámetro de la imagen proyectada del Sol, es decir encuentra una expresión para D_i en términos del ángulo de paralaje θ y la distancia L.	2 punto

1.3	Determina una expresión para la densidad del sol ρ_s en términos únicamente de la constante gravitacional G, el periodo orbital T de la Tierra alrededor del Sol y algunos de los parámetros geometricos que se especifican en la figura 2, pero NO la distancia Tierra-Sol d , el proposito del problema es precisamente obtener una expresión para la densidad del Sol que no contenga la distancia Tierra-Sol. Debes usar la expresión de la masa del Sol que encontraste en el inciso (1.1), solo la expresión pero no su valor numerico que calculaste, (puede haber también factores constantes adicionales en tu formula final).	2 puntos

En una practica real, para medir la distancia L desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol, así como el ángulo de paralaje θ presentan algunas dificultades por lo que se proponen el esquema mostrado en la figura 3. Aquí se muestra la imagen proyectada del Sol sobre una superficie oscura que esta inclinada un ángulo ϕ respecto del suelo. H es la altura desde el centro de la imagen del Sol hasta el punto O (donde se encuentra el orificio por el que pasan los rayos del Sol), W es la distancia horizontal entre el centro de la imagen del Sol y la linea vertical que coincide con punto O y L sigue siendo la distancia entre la imagen del Sol y el orificio. La figura 4 es una imagen real donde se observa como se mide el ángulo de inclinación ϕ con un sextante, además el dispositivo cuenta con una regla graduada para medir el diámetro D_i de la imagen proyectada del Sol.

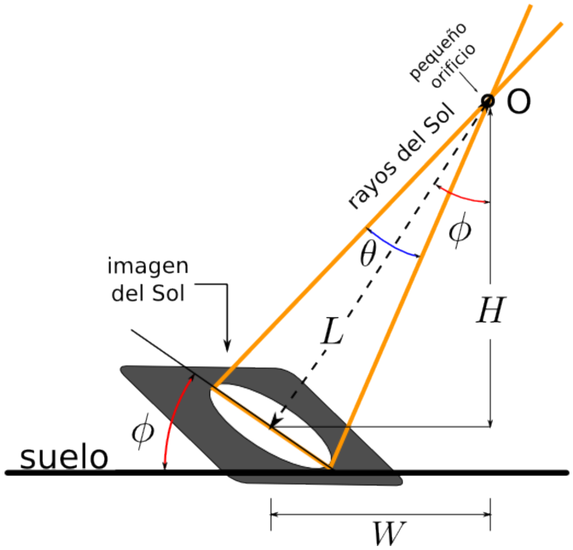


Figura 3: Proyección del Sol sobre una superficie que esta inclinada un ángulo ϕ respecto del suelo.

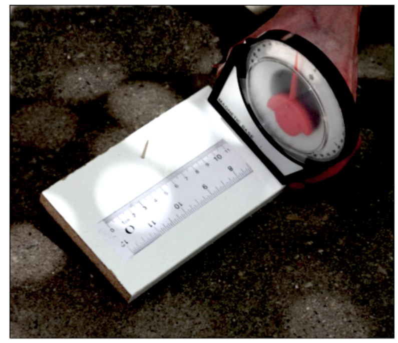


Figura 4: Sextante empleado para medir el ángulo de inclinación ϕ así como el diámetro de la imagen proyectada del Sol D_s.

1.4	En un experimento real se midieron los siguientes valores: $W = 1.6\,\mathrm{m}$, $\phi = 15^\circ$ y $D_i = 5.8\,\mathrm{cm}$ Con estos valores calcula el valor de la densidad del Sol.	3 puntos

Problema 2 Ondas en la superficie agua	**(10 puntos)**

Imagine una persona soltando piedritas muy pequeñas a una altura fija sobre la superficie (quieta) de un lago. Al caer una piedrita sobre el lago se producirá una onda en forma de círculo, de tal manera que el radio R de dicho círculo (llamada cresta) se propaga a una velocidad constante $v_s = 2.5\,\text{m/s}$, ver figura 5

Suponga ahora que la persona suelta una piedrita cada segundo, es decir, a una frecuencia $\nu = 1\,\text{s}^{-1}$. Después de soltar varias piedritas observaremos varios círculos concéntricos cuyos radios están separados por una distancia λ (figura 6). Llamemos a esta cantidad λ la longitud de onda, que es la separación entre las crestas en cualquier dirección.

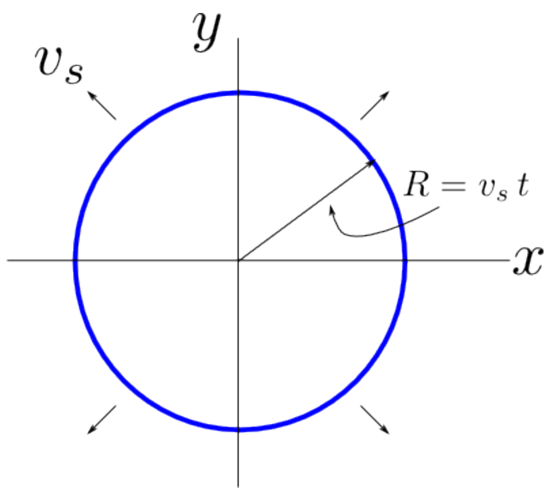


Figura 5: Onda que se propaga en el agua con velocidad v_s

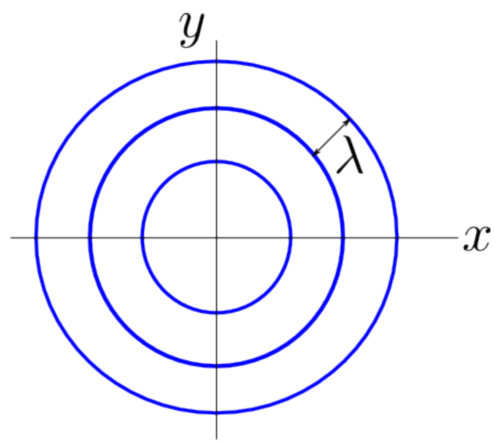


Figura 6: longitud de onda λ

2.1	Calcule el valor de λ	1 punto

Considere que a una distancia alejada de donde caen las piedritas, colocamos un "detector" de crestas. Por ejemplo, podría ser un corcho conectado a un dispositivo electrónico tal que registrara cuando el corcho subiera y bajara al pasar la cresta. Usando un sistema de coordenadas con el origen donde caen las piedritas, suponemos que el detector está en una posición D sobre el eje positivo de las x 's. Suponga que ponemos también otro detector a una distancia $-D$, en el mismo eje. Vea la figura 7

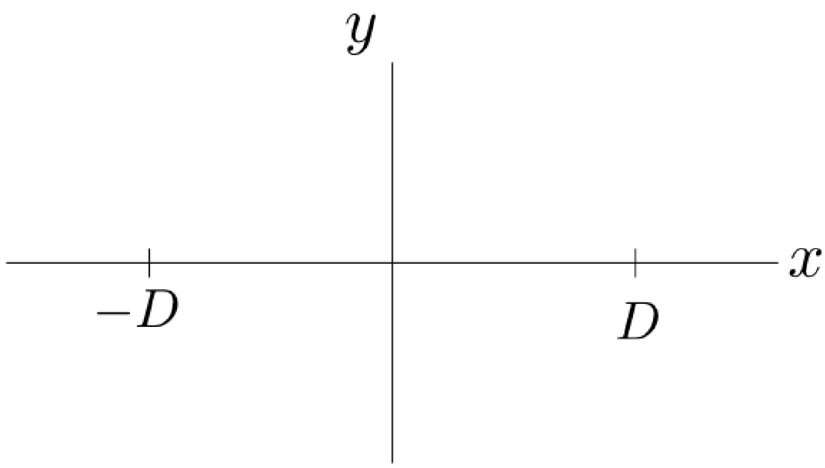


Figura 7: Detectores colocados en $-D$ y D

2.2	¿Qué frecuencia registran los detectores? es decir, con que frecuencia suben y bajan los corcho colocados en las posiciones $-D$ y D	1 punto

Ahora la persona que suelta las piedritas se mueve con velocidad $v_f = 1.5$ m/s en la dirección positiva de las x's (por ejemplo, la persona podría ir en un helicóptero volando a baja altura), sin embargo, las piedras las suelta, y caen en el agua, a la misma frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ Note que la persona se mueve a una velocidad menor que a la que se propagan las ondas, $v_f < v_s$. Para contestar las siguientes dos preguntas, le sugerimos que realice un dibujo de las ondas en este caso (usa el papel milimétrico que se te da).

2.3	Encuentre la frecuencia que registra el detector en D (es decir, la frecuencia con la que el corcho sube y baja). Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de ν y luego evalúela numéricamente	2 punto

2.4	Encuentre la frecuencia que registra el detector en $-D$. Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de ν y luego evalúela numéricamente	2 punto

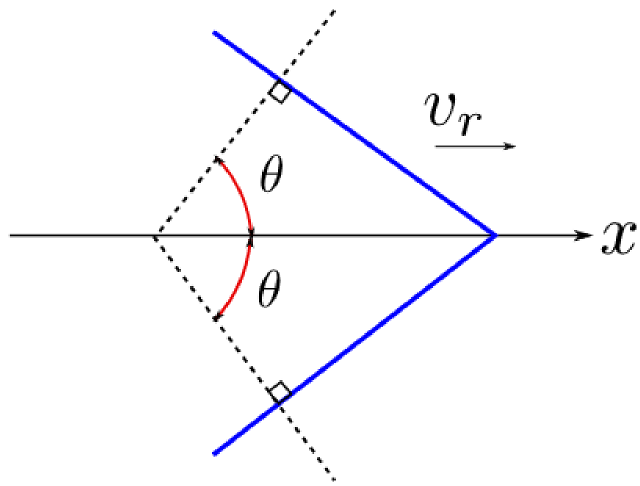


Figura 8: Después de muchas piedritas las crestas se "juntan" y el frente de todas las crestas se propaga como un línea perpendicular a un ángulo θ con respecto al eje de las x

Olvide los detectores y suponga que la persona se mueve ahora con velocidad $v_r = 5$ m/s en la dirección positiva de las x's y continúa soltando las piedritas a la misma frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. ¡Note que $v_r > v_s$! es decir, la persona se mueve más rápido que la velocidad a la que se propagan las ondas en el agua. Muestre que después de muchas piedritas las crestas se "juntan" formando un frente que se propaga como una línea perpendicular a un ángulo θ con respecto al eje de las x, vea la figura 8. Para hacer esta demostración siga los siguientes pasos:

2.5	Usando la hoja de papel milimétrico haga un dibujo aproximado de las crestas a un tiempo $t = 5$ s, suponiendo que la primera piedra golpeó el agua al tiempo $t = 0$	2 punto

2.6	Uniendo con una recta tangente los puntos más extremos y adelantados de las crestas, encuentre una expresión para el ángulo θ que hace la dirección de propagación de dicha tangente con el eje de las x, y evalúelo.	2 punto

Las preguntas (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) ilustran el efecto Doppler, mientras que las (2.5) y (2.6) el efecto Cerenkov. Este último provee una explicación sencilla de las estelas que dejan los barcos al moverse en el mar.

Problema 3 Modelo de Bohr, Centro de Masa (10 puntos)

Hace 100 años, en 1913 el físico danés Niels Bohr desarrolló un modelo para describir el átomo de hidrógeno. El principal motivo de Bohr fue el de explicar las lineas espectrales que se estaban observando en los gases de hidrógeno al hacer pasar una corriente eléctrica sobre ellos. Estas líneas espectrales tienen su origen en las propiedades cuánticas de los átomos. Cuando se hace pasar una corriente eléctrica en un gas, los electrones de cada átomo son excitados, esto quiere decir que adquieren energía (ganan energía), pero después de un breve lapso de tiempo pierden esta energía y regresan a su estado inicial emitiendo la energía que ganaron en forma de radiación (luz), lo que explica las lineas observadas en los espectros del gas de hidrógeno, en la figura 9 se muestra el espectro de un gas de hidrógeno donde se aprecian claramente las lineas espectrales.

Figura 9: Lineas espectrales en un gas de hidrógeno

El átomo de hidrógeno consiste en un protón que compone su núcleo y un electrón girando en órbitas circulares alrededor del protón, ver figura 10. El protón tiene una carga eléctrica $q_p = e$ y el electrón tiene la misma carga pero de signo contrario $q_e = -e$. Donde e es la carga eléctrica elemental cuyo valor es: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Al estar cargados eléctricamente, el protón y el electrón se atraen por ley de Coulomb.

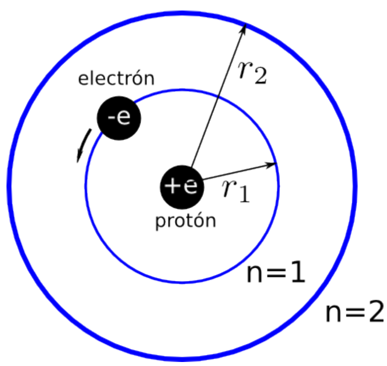


Figura 10: Modelo del átomo de Hidrógeno, el electrón gira en órbitas circulares alrededor del protón.

En su modelo del átomo de hidrógeno, Bohr estableció que el electrón gira alrededor del protón en órbitas circulares en las que su radio r_n, su velocidad v_n y su energía total E_n pueden tomar únicamente los siguientes valores:

$$\begin{aligned} r_n &= a_0 n^2 \\ v_n &= v_0 n \\ E_n &= -\frac{E_0}{n^2} \end{aligned}, \qquad \text{donde } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3}$$

Donde a_0, v_0 y E_0 son valores constantes y n puede tomar cualquier valor entero positivo. Cada órbita en la que gira el electrón representa un *estado* y esta determinado por el valor de n (*número cuántico principal*). En la figura 10 se muestra el esquema de las órbitas permitidas del átomo de hidrógeno para los dos primeros estados $n = 1$, 2.

Estas propiedades son el resultado de un principio único que establece que las órbitas en las que puede girar el electrón son aquellas cuyo momento angular L sea múltiplo de una constante: $L = n\frac{h}{2\pi}$, esta es la regla de cuantización del momento angular. El momento angular de una partícula se define como: $L = mvr$, donde m es la masa de la partícula, v es su velocidad tangencial y r es el radio orbital.

Primer estado $n = 1$

En el primer estado $n = 1$, la regla de cuantización del momento angular queda establecida por la siguiente ecuación:

$$m_e v_0 a_0 = \frac{h}{2\pi}, \tag{4}$$

donde $h = 6.63 \times 10^{-34}$ J · s, es la constante de Planck y $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg es la masa del electrón; v_0 y a_0 corresponden a la velocidad y el radio orbital del electrón alrededor del protón en el primer estado ($n = 1$).

Si la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene al electrón girando en su órbita circular alrededor del protón.

$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$

3.1	Demuestra que el valor del radio orbital del electrón en su primer estado a_0, esta dado por la siguiente expresión y calcula su valor: $$a_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{m_e \pi e^2} \tag{5}$$ Si te sirve, puedes hacer uso de la siguiente definición: $$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} \tag{6}$$	2 puntos

Movimiento respecto del centro de masa.

El modelo del átomo de hidrógeno descrito hasta ahora supone que el protón esta fijo y el electrón gira en torno al protón en una órbita circular. Sin embargo esto es solo una aproximación ya que en general tanto el protón como el electrón giran en torno a un punto fijo llamado Centro de Masa (CM). Analizaremos ahora como se modifican el valor de la separación entre el protón y el electrón en el primer estado ($n = 1$) calculado en el inciso anterior, pero tomando en cuenta el movimiento del protón y el electrón respecto de CM.

En la figura 11 se indica el movimiento del protón, cuya masa es $m_p = 1.6 \times 10^{-27}$ kg y el electrón m_e en torno al centro de masa CM. Respecto del CM, el protón gira en una órbita circular de radio r_p y el electrón en una órbita de radio mayor r_e. Ambas partículas giran con la misma velocidad angular ω y la separación entre el protón y el electrón r es siempre constante, ver figura 11.

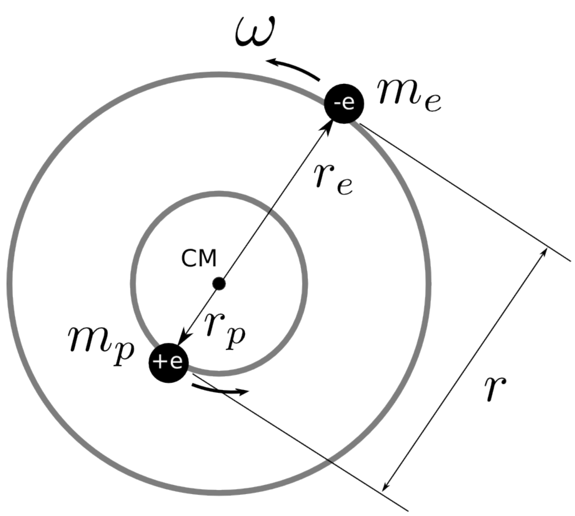


Figura 11: Movimiento del protón y del electrón en el átomo de hidrógeno respecto del centro de masa.

3.2	Encuentra las expresiones para el radio del electrón r_e y del protón r_p en términos de la masa del protón m_p, la masa del electrón m_e y la distancia que los separa r. Sugerencia: coloca el centro de masa en el origen.	1 puntos

3.3	Sea L_{cm} el momento angular total del protón y del electrón respecto del CM. Determina la expresión de L_{cm} en términos de las masas del protón y el electrón (m_p, m_e), de la distancia que los separa r y de la velocidad angular ω con que gira el sistema protón-electrón alrededor del centro de masa.	2 puntos

Consideremos nuevamente el primer estado del átomo de hidrógeno ($n = 1$), pero haciendo el análisis desde el centro de masa. Denotemos en este caso r_0 a la distancia entre el protón y el electrón en el primer estado ($n = 1$). Entonces en el primer estado $n = 1$, la regla de cuantización del momento angular queda establecida por:

$$L_{cm} = \frac{h}{2\pi} \tag{7}$$

Esta expresión es similar a la ecuación (4), excepto que ahora L_{cm} es el momento angular total del protón y del electrón respecto de CM (L_{cm} la obtuviste en el inciso anterior).

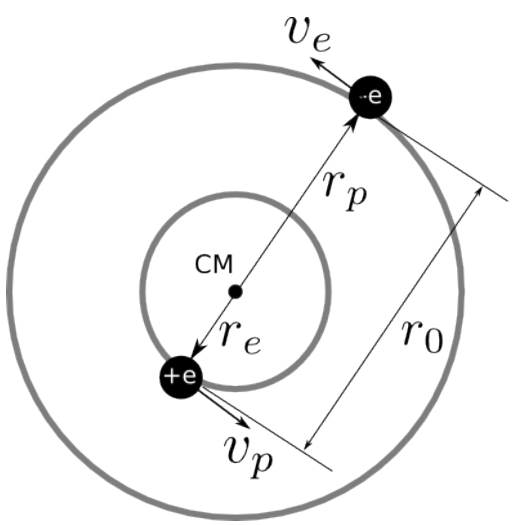


Figura 12: Primer estado $n = 1$ del átomo de hidrógeno visto desde el CM.

3.4	Usando la regla de cuantización del momento ángular respecto del centro de masa, ecuación (7), demuestra que la expresión de la distancia entre el protón y electrón r_0 esta dada por la siguiente expresión y calcula su valor: $$r_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\mu \pi e^2}, \qquad \text{donde} \quad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \qquad (8)$$ Considera de nuevo que la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene girando al protón y al electrón alrededor del CM.	3 puntos

El positronio es un sistema de dos partículas, un positrón y un electrón, que giran alrededor de su centro de masa debido a la atracción eléctrica entre ambas partículas. El positrón es la antipartícula del electrón, esto significa que el positrón tiene la misma masa que el electrón: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, pero su carga es de signo contrario a la del electrón.

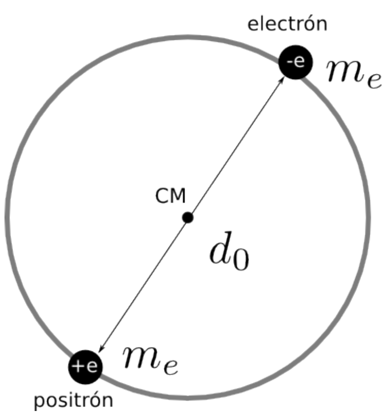


Figura 13: Primer estado del positronio: un electrón y un positrón girando alrededor de su centro de masa, ambas partículas tienen la misma masa $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg y la misma carga $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C pero de signos contrarios. La distancia de separación entre el prositrón y el electrón es d_0.

3.5	Si denotamos como d_0 a la distancia que separa al positrón del electrón en el positronio cuando esta en el primer estado ($n = 1$), como se muestra en la figura 13. Usando los resultados anteriores, calcula el valor de la distancia d_0.	2 puntos

SMF
Sociedad Mexicana de Física

XXIV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Durango 17-21 de noviembre de 2013
Prueba teórica, Solución.

Problema 1 Densidad del Sol (10 puntos)

Uno de los experimentos más importantes de la física se remonta al año 1797 en el que Henry Cavendish logró medir experimentalmente la fuerza gravitacional entre dos esferas metálicas a través de un dispositivo llamado balanza de torsión. Con este experimento Cavendish logró medir la constante gravitacional, cuyo valor reportado actualmente es: $G = 6.7 \times 10^{-11}\text{Nm}^2/\text{kg}^2$. Al medir la constante gravitacional, Cavendish pudo determinar la masa de la Tierra! Una vez medida la masa de la Tierra, una pregunta nos salta: ¿cuál es la masa del Sol?

1.1	**Pregunta:** Si la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita circular de radio $d = 150 \times 10^6\,\text{km}$, determina una expresión para calcular la masa del Sol y calcula su valor con los datos de que dispones.	3 puntos

Solución:
(2 puntos) Por escribir o deducir la tercera ley de Kepler, ecuación (1).
La tercera ley de Kepler establece:

$$\boxed{\frac{d^3}{T^2} = \text{cte} = \frac{M_s G}{4\pi^2}} \tag{1}$$

donde d es la distancia Tierra-Sol y T es el periodo orbital de la Tierra alrededor del Sol.
El valor de la constante cte $= \frac{M_s G}{4\pi^2}$ se obtiene al igualar la fuerza centrípeta con la gravitacional entre el Sol y la Tierra:

$$\frac{M_t v^2}{d} = G\frac{M_s M_t}{d^2}, \tag{2}$$

donde $v = \omega d$ es la rapidez con que se mueve la Tierra alrededor del Sol ($\omega = 2\pi/T$). Sustituyendo en la expresión anterior se obtiene la ecuación (1):

$$\frac{(\omega d)^2}{d} = G\frac{M_s}{d^2}, \qquad \Rightarrow \quad \frac{d^3}{T^2} = \frac{M_s G}{4\pi^2} \tag{3}$$

(1 punto) por obtener el valor correcto de la masa del Sol.
Despejando la masa del Sol M_s, se obtiene la expresión que se pide en términos de la constante gravitacional G, cuyo valor esta indicado en la introducción del problema; la distancia Tierra-Sol d (cuyo valor se da en la pregunta) y el período orbital de la Tierra $T = 1\text{año}$:

$$M_s = \frac{4\pi^2 d^3}{GT^2} \tag{4}$$

sustituyendo los valores se obtiene el valor numérico:

$$\Rightarrow \quad \boxed{M_s = \frac{4\pi^2 \left(150 \times 10^9\,\mathrm{m}\right)^3}{\left(6.7 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2\right)\left(365 \times 24 \times 60 \times 60\,\mathrm{s}\right)^2} = 1.99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \approx 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}} \tag{5}$$

A continuación se propone un experimento muy sencillo a partir del cual se puede medir la densidad del Sol y que no necesita el conocimiento de la distancia Tierra-Sol.

Cuando se hace pasar la luz del sol a través de un pequeño orificio, por ejemplo el que se puede hacer con una aguja sobre una hoja de papel, es posible proyectar una imagen luminosa del Sol sobre una superficie más oscura tal como se muestra en la figura 1.

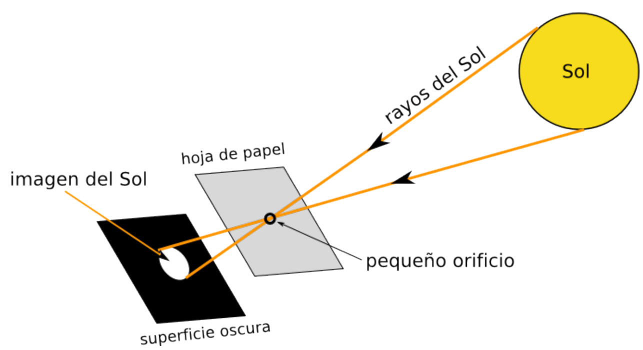


Figura 1: Proyección de Sol a través de pequeño orificio.

Para determinar la densidad del Sol a través de este experimento, en la figura 2 se hace un esquema del experimento con los parámetros geométricos involucrados: D_s es el diámetro del sol y D_i es el diámetro de la imagen del Sol que se proyecta sobre alguna superficie (la misma superficie oscura que se muestra en la figura 1), d es la distancia perpendicular desde el orificio hasta el Sol, que para fines prácticos corresponde a la distancia Tierra-Sol, mientras que L es la distancia perpendicular desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol y θ es el ángulo de paralaje que tiene su vértice en el orificio y tiene como rectas los rayos del Sol que pasan a través el orificio.

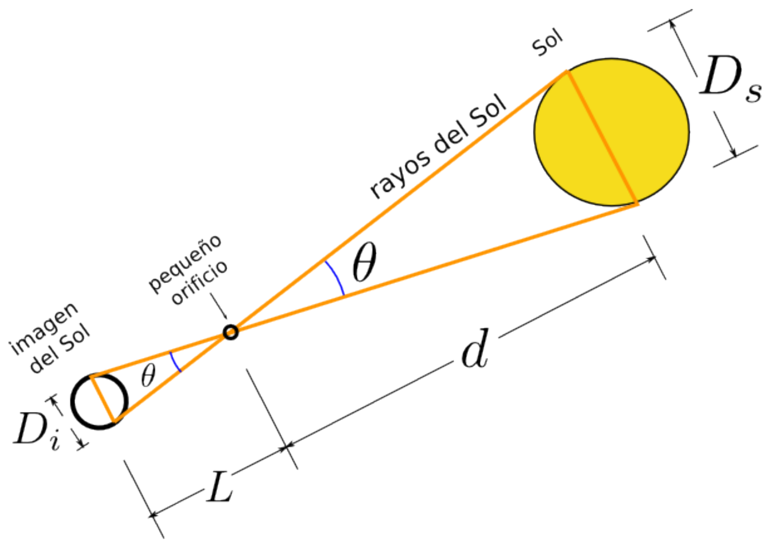


Figura 2: Parámetros geométricos de la imagen del Sol cuando pasa a través de un orificio.

Debes notar que la distancia Tierra-Sol d es mucho mayor que el diámetro del Sol D_s, de la misma manera se debe procurar que la distancia L, desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol debe ser mucho mayor que el diámetro de la imagen proyectada del Sol D_i

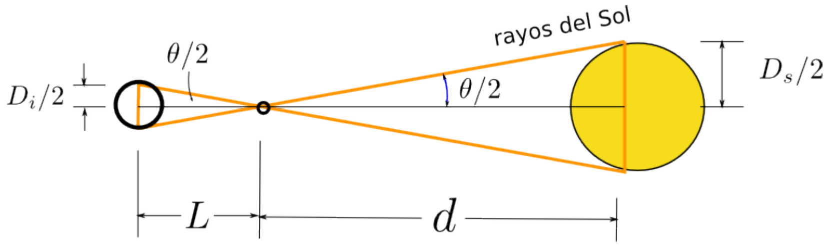
$$d \gg D_s \qquad\qquad L \gg D_i \tag{6}$$

Esto significa que el ángulo de paralaje θ es muy pequeño. Para ángulos pequeños se pueden hacer las siguientes aproximaciones de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &\approx \theta \\ \cos\theta &\approx 1 \end{aligned} \tag{7}$$

1.2	Usando la figura 2 determina una expresión para calcular el diámetro del Sol D_s en términos del ángulo de paralaje θ y la distancia Tierra-Sol d. Haz lo mismo con el diámetro de la imagen proyectada del Sol, es decir encuentra una expresión para D_i en términos del ángulo de paralaje θ y la distancia L.	2 punto

Solución:



(1 punto) Por la expresión del diámetro del Sol D_s.
Usando la definición de la tangente y la aproximación de ángulos pequeños se obtiene:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D_s}{2d}, \qquad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \approx \frac{\theta}{2}, \qquad \Rightarrow \quad \boxed{D_s \approx \theta d} \tag{8}$$

(1 punto) Por la expresión del diámetro de la imagen del Sol D_i.
De la misma manera se obtiene:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{D_i}{2L}, \qquad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \approx \frac{\theta}{2}, \qquad \Rightarrow \quad \boxed{D_i \approx \theta L} \tag{9}$$

1.3	Determina una expresión para la densidad del sol ρ_s en términos únicamente de la constante gravitacional G, el periodo orbital T de la Tierra alrededor del Sol y algunos de los parámetros geométricos que se especifican en la figura 2, pero NO la distancia Tierra-Sol d , el propósito del problema es precisamente obtener una expresión para la densidad del Sol que no contenga la distancia Tierra-Sol. Debes usar la expresión de la masa del Sol que encontraste en el inciso (1.1), solo la expresión pero no su valor numérico que calculaste, (puede haber también factores constantes adicionales en tu formula final).	2 puntos

Solución:
(0.25) Puntos por escribir la definición de la densidad.
La densidad del Sol esta dada por la razón entre la masa del Sol y su volumen:

$$\rho_s = \frac{M_s}{V_s} \tag{10}$$

(0.25) Puntos por escribir la definición del volumen del Sol (esfera).
El volumen del Sol esta dado por la siguiente expresión:

$$V_s = \frac{4}{3}\pi R_s^3 = \frac{\pi D_s^3}{6}, \tag{11}$$

(0.5) Puntos por sustituir la masa y el volumen del Sol para llegar a la ecuación (12)**.**
Sustituyendo la expresión del volumen del Sol y la ecuación (4) del inciso (1.1):

$$\rho_s = \frac{\frac{4\pi^2 d^3}{GT^2}}{\frac{\pi D_s^3}{6}} = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{d}{D_s}\right)^3 \tag{12}$$

(1 punto) Por llegar a cualquiera de las ecuaciones (13) **o** (15)
La densidad del Sol (12) todavía contiene la dependencia con la distancia Tierra-Sol d. Para eliminar esta dependencia se deben usar los resultados del inciso (1.2), hay dos posibles maneras:

1 Usando la expresión $D_s \approx \theta d$, ecuación (8):

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{d}{D_s}\right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{d}{\theta d}\right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2\theta^3}} \tag{13}$$

2 Dividiendo ambas expresiones (8) y (9)

$$\frac{D_s}{D_i} = \frac{\theta d}{\theta L}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{D_s}{D_i} = \frac{d}{L} \qquad \text{o} \qquad \frac{d}{D_s} = \frac{L}{D_i} \tag{14}$$

Sustituyendo en (12), se obtiene:

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{d}{D_s}\right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{L}{D_i}\right)^3} \tag{15}$$

Como $D_i = \theta L$ ambas ecuaciones coinciden.

En una practica real, para medir la distancia L desde el orificio hasta la imagen proyectada del Sol, así como el ángulo de paralaje θ presentan algunas dificultades por lo que se proponen el esquema mostrado en la figura 3. Aquí se muestra la imagen proyectada del Sol sobre una superficie oscura que esta inclinada un ángulo ϕ respecto del suelo. H es la altura desde el centro de la imagen del Sol hasta el punto O (donde se encuentra el orificio por el que pasan los rayos del Sol), W es la distancia horizontal entre el centro de la imagen del Sol y la linea vertical que coincide con punto O y L sigue siendo la distancia entre la imagen del Sol y el orificio. La figura 4 es una imagen real donde se observa como se mide el ángulo de inclinación ϕ con un sextante, además el dispositivo cuenta con una regla graduada para medir el diámetro D_i de la imagen proyectada del Sol.

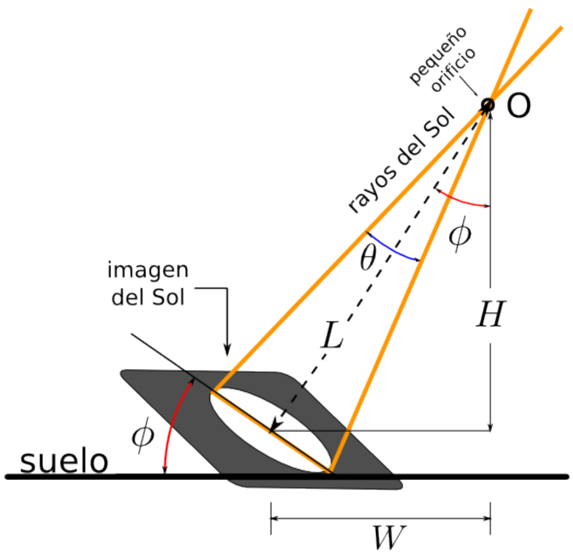


Figura 3: Proyección del Sol sobre una superficie que esta inclinada un ángulo ϕ respecto del suelo.

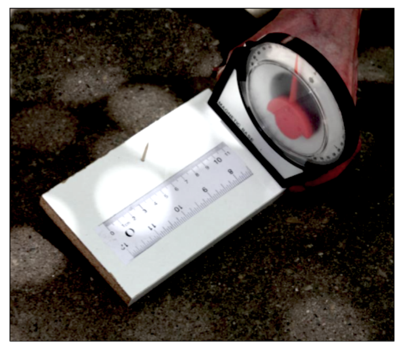


Figura 4: Sextante empleado para medir el ángulo de inclinación ϕ así como el diámetro de la imagen proyectada del Sol D_s.

1.4	En un experimento real se midieron los siguientes valores: $W = 1.6\,\text{m}$, $\phi = 15°$ y $D_i = 5.8\,\text{cm}$ Con estos valores calcula el valor de la densidad del Sol.	3 puntos

Solución:
(1 punto) por obtener cualquiera de los dos relaciones: (16) **o** (17)**.**
De acuerdo a la figura 3, tenemos:

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{W}{L}, \qquad \Rightarrow \quad L = \frac{W}{\operatorname{sen}\phi} \tag{16}$$

Del resultado (9) inciso 1.2 se obtiene:

$$D_i = \theta L, \qquad \Rightarrow \quad \theta = \frac{D_i}{L} = \frac{\operatorname{sen}\phi D_i}{W} \tag{17}$$

(1 punto) por obtener la ecuación final para la densidad del Sol ρ_s
De acuerdo a los resultados del inciso anterior, se puede proceder de dos maneras:

1 Sustituyendo la expresión del ángulo de paralaje (17) en la ecuación (13):

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2\theta^3} = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{W}{\operatorname{sen}\phi D_i}\right)^3} \tag{18}$$

2 Sustituyendo (16) en la ecuación (15):

$$\boxed{\rho_s = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{L}{D_i}\right)^3 = \frac{24\pi}{GT^2}\left(\frac{W}{\operatorname{sen}\phi D_i}\right)^3} \tag{19}$$

Ambos maneras dan la misma expresión final.

(1 punto) por obtener el valor correcto de la densidad del Sol.
Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}\rho_s &= \frac{24\pi}{6.7\times 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}\,(3.15\times 10^7\,\mathrm{s})^2}\left[\frac{1.6\,\mathrm{m}}{\operatorname{sen}(15^\circ)\,(5.8\times 10^{-2}\,\mathrm{m})}\right]^3 \\ &\boxed{= 1380\,\mathrm{kg/m^3} = 1.38\times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}}\end{aligned} \tag{20}$$

Datos:
$T = 365\times 24\times 60\times 60\,\mathrm{s} = 3.15\times 10^7\,\mathrm{s}$ (periodo orbital de la Tierra alrededor del Sol)
$\phi = 15^\circ$ (ángulo de inclinación)
$W = 1.6\,\mathrm{m}$
$D_i = 5.8\times 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Problema 2 Ondas en la superficie agua **(10 puntos)**

Imagine una persona soltando piedritas muy pequeñas a una altura fija sobre la superficie (quieta) de un lago. Al caer una piedrita sobre el lago se producirá una onda en forma de círculo, de tal manera que el radio R de dicho círculo (llamada cresta) se propaga a una velocidad constante $v_s = 2.5\,\mathrm{m/s}$, ver figura 5

Suponga ahora que la persona suelta una piedrita cada segundo, es decir, a una frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Después de soltar varias piedritas observaremos varios círculos concéntricos cuyos radios están separados por una distancia λ (figura 6). Llamemos a esta cantidad λ la longitud de onda, que es la separación entre las crestas en cualquier dirección.

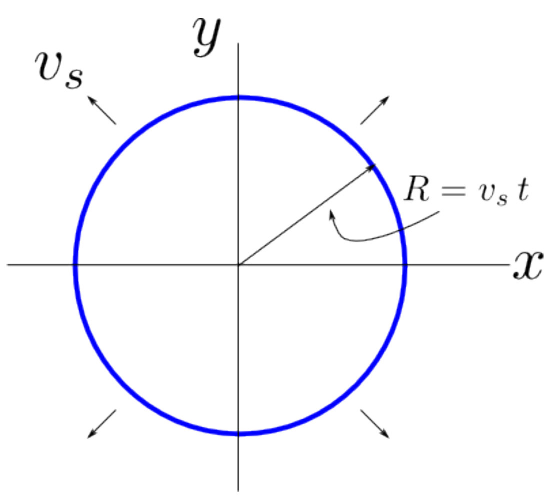


Figura 5: Onda que se propaga en el agua con velocidad v_s

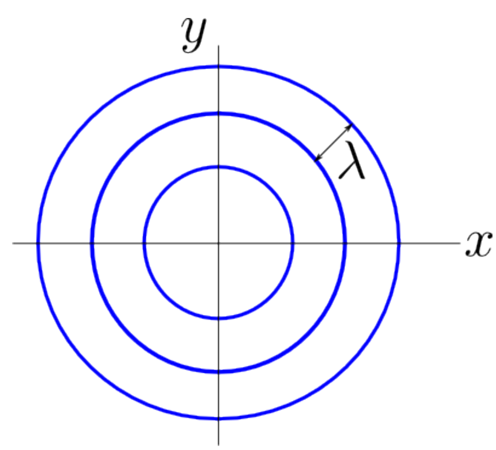


Figura 6: longitud de onda λ

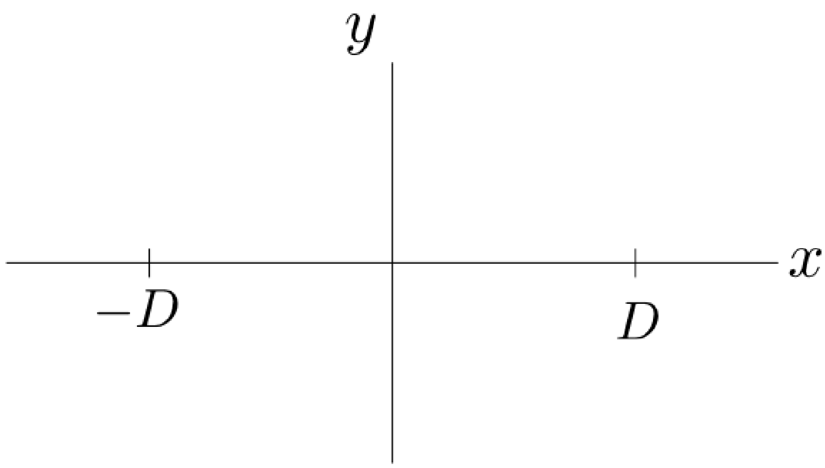


Figura 7: Detectores colocados en $-D$ y D

2.1	Calcule el valor de λ	1 punto

Solución:

Un aspecto muy importante es darse cuenta que la velocidad de las ondas superciales siempre es la misma, sin importar el estado de miviemiento del que suelta las piedras. Esto se usará en todos los ejercicios. Para este inciso, como las ondas se "crean" cada periodo $\tau = \nu^{-1}$ =1 s, y la velocidad de la onda es v_s, entonces, en un periodo la cresta viaja una longitud de onda

$$\lambda = v_s \tau \tag{21}$$

Evaluando, obtenemos λ =2.5 m.

0.75 puntos por la fórmula, 0.25 puntos por el valor numérico.

Considere que a una distancia alejada de donde caen las piedritas, colocamos un "detector" de crestas. Por ejemplo, podría ser un corcho conectado a un dispositivo electrónico tal que registrara cuando el corcho subiera y bajara al pasar la cresta. Usando un sistema de coordenadas con el origen donde caen las piedritas, suponemos que el detector está en una posición D sobre el eje positivo de las x 's. Suponga que ponemos también otro detector a una distancia $-D$, en el mismo eje. Vea la figura 7

2.2	¿Qué frecuencia registran los detectores? es decir, con que frecuencia suben y bajan los corcho colocados en las posiciones $-D$ y D	1 punto

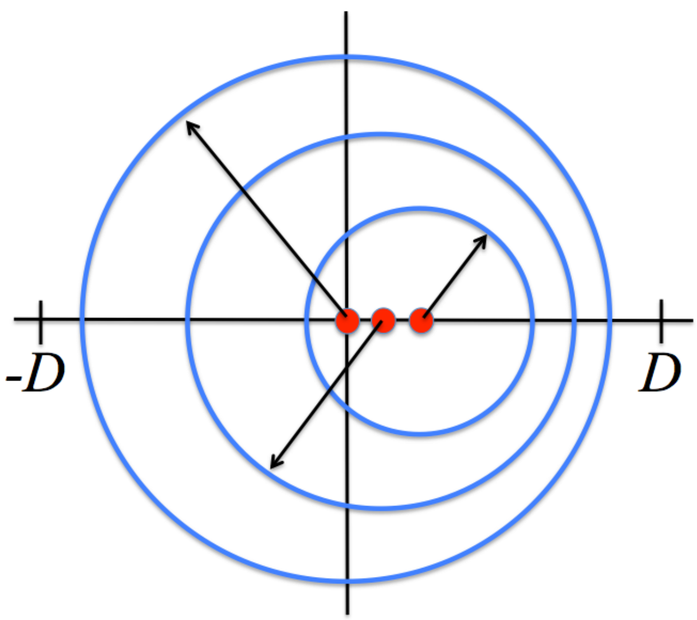
Solución:

La frecuencia que reciben los detectores es el inverso del tiempo que transcurre entre crestas consecutivas. Debido a que la las ondas se crean en el mismo punto (el origen de coordenadas) y lo hacen a una frecuencia fija, y debido a que la velocidad de las ondas es la misma, la frecuencia que reciben ambas fuentes es la misma con la que se originan: $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$.

0.5 puntos por hallar el valor de la frecuencia y 0.5 por decir que ambos detectores miden la misma frecuencia.

Ahora la persona que suelta las piedritas se mueve con velocidad $v_f = 1.5$ m/s en la dirección positiva de las x's (por ejemplo, la persona podría ir en un helicóptero volando a baja altura), sin embargo, las piedras las suelta, y caen en el agua, a la misma frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ Note que la persona se mueve a una velocidad menor que a la que se propagan las ondas, $v_f < v_s$. Para contestar las siguientes dos preguntas, le sugerimos que realice un dibujo de las ondas en este caso (usa el papel milimétrico que se te da).

2.3	Encuentre la frecuencia que registra el detector en D (es decir, la frecuencia con la que el corcho sube y baja). Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de ν y luego evalúela numéricamente	2 punto



Solución:

La clave para este problema es darse cuenta que el origen de cada onda se mueve a diferente lugar, debido a que la persona que la suelta se mueve a velocidad v_f. Por lo tanto, si suponemos que la primera piedra cayó en el origen, $x_0 = 0$, la segunda caerá en $x_1 = v_f\tau$, la tercera en $x_2 = v_f(2\tau)$, luego $x_3 = v_f(3\tau)$, etc, donde τ es el periodo $\tau = \nu^{-1}$. Sin embargo, una vez que se producen las ondas, todas viajan a la misma velocidad. Vea el dibujo:
Del dibujo se nota que el detector en D recibira ondas separadas una distancia más corta $\lambda' > \lambda$ que la longitud de onda original (del inciso 1). Como las crestas viajan a la misma velocidad del agua, el periodo entre las crestas es

$$\tau' = \frac{\lambda'}{v_s} \tag{22}$$

entonces, tenemos que calcular la distancia λ'. La figura representa unas cuantas crestas a un tiempo arbitrario dado. Sea d la distancia del origen a la cresta de cualquier onda, medida sobre el eje de las x. Supongamos que se originó en x_0 y que lleva viajando un tiempo t. Por lo tanto,

$$d = x_0 + v_s t \tag{23}$$

La siguiente cresta (a su izquierda en el dibujo) en el mismo tiempo está en d'. Esta onda se originó en $x_0 + v_f\tau$, donde $v_f\tau$ es la distancia entre centros, que es la distancia que viajó la persona entre las dos piedras consecutivas que soltó. Por lo tanto,

$$d' = x_0 + v_f\tau + v_s(t - \tau) \tag{24}$$

donde hemos usado que si la primera onda lleva viajando un tiempo t, la siguiente lleva $t - \tau$. Por lo tanto,

$$\lambda' = d - d' \tag{25}$$

$$\lambda' = (v_s - v_f)\tau \tag{26}$$

por tanto el periodo que mide el detector es,

$$\tau' = \frac{v_s - v_f}{v_s}\tau \tag{27}$$

La frecuencia que mide es $\nu' = 1/\tau'$, y usando $\nu = 1/\tau$, obtenemos el resultado buscado,

$$\nu' = \frac{v_s}{v_s - v_f}\nu \tag{28}$$

Notamos que la frecuencia que recibe es más alta que la original pues las ondas se "juntan". Este es el caso emisor y observador acercándose del efecto Doppler acústico.

Se dará 1 punto por la explicación correcta y 1 punto por la deducción. Hay que tomar en cuenta que a veces se confunden con los signos y aunque expliquen bien pueden tomar el signo equivocado. Por explicación correcta es suficiente que digan que las ondas se "acercan" entre ellas y por lo tanto el detector mide un periodo córto o frecuencia más larga. Se dará 0.5 puntos si se equivocan en álgebra pero plantean bien el problema.

2.4	Encuentre la frecuencia que registra el detector en $-D$. Deduzca primero una expresión de dicha frecuencia en términos de ν y luego evalúela numéricamente	2 puntos

Solución:
Este caso es similar al anterior, excepto que ahora las ondas se alejan. Es decir, la distancia entre las ondas es $\lambda'' > \lambda$, mayor que la original. El periodo de detección es $\tau'' = \lambda''/v_s$. De nuevo, la posición en x de la primera cresta la podemos escribir como

$$d = x_0 + v_s t \tag{29}$$

Lo importante es que para la siguiente cresta su origen se alejó en vez de acercarse, es decir,

$$d'' = x_0 - v_f \tau + v_s(t - \tau) \tag{30}$$

Entonces

$$\lambda'' = d - d'' = (v_s + v_f)\tau \tag{31}$$

$$\tau'' = \frac{v_s + v_f}{v_s} \tag{32}$$

y la la frecuencia de detección es

$$\nu'' = \frac{\nu_s}{\nu_s + \nu_f} \tag{33}$$

La frecuencia detectada es ahora menor que la original. Este es emisor y detector alejándose.

Se dará 1 punto por la explicación correcta y 1 punto por la deducción. Hay que tomar en cuenta que a veces se confunden con los signos y aunque expliquen bien pueden tomar el signo equivocado. Por explicación correcta es suficiente que digan que las ondas se "acercan" entre ellas y por lo tanto el detector mide un periodo más corto o frecuencia más larga. Se dará 0.5 puntos si se equivocan en álgebra pero plantean bien el problema.

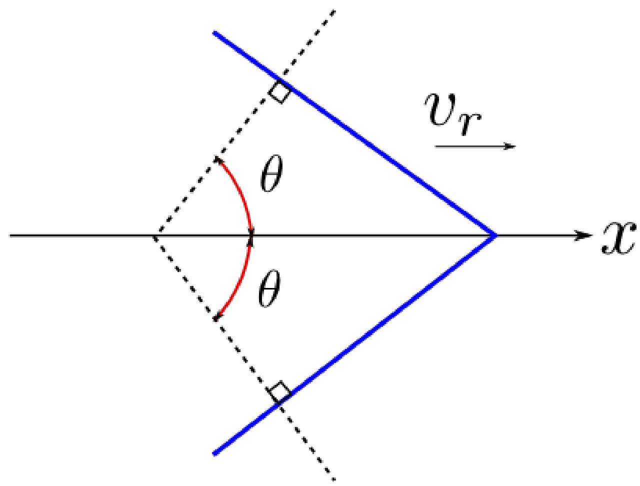
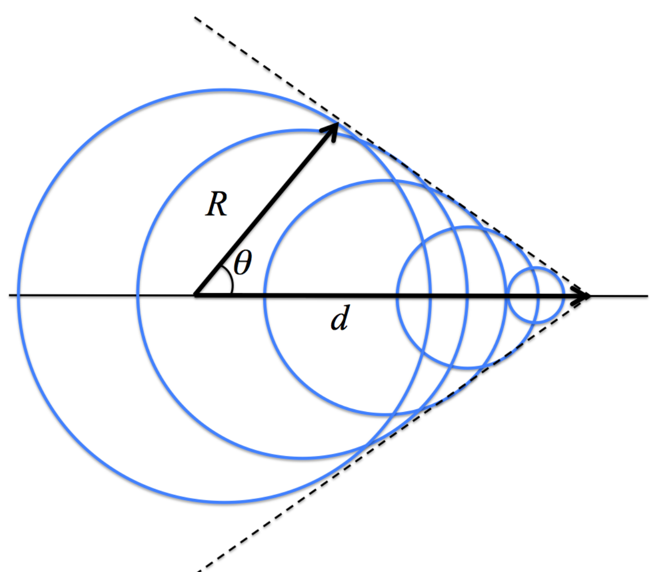


Figura 8: Después de muchas piedritas las crestas se "juntan" y el frente de todas las crestas se propaga como un línea perpendicular a un ángulo θ con respecto al eje de las x

Olvide los detectores y suponga que la persona se mueve ahora con velocidad $v_r = 5$ m/s en la dirección positiva de las x's y continúa soltando las piedritas a la misma frecuencia $\nu = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. ¡Note que $v_r > v_s$! es decir, la persona se mueve más rápido que la velocidad a la que se propagan las ondas en el agua. Muestre que después de muchas piedritas las crestas se "juntan" formando un frente que se propaga como una línea perpendicular a un ángulo θ con respecto al eje de las x, vea la figura 8. Para hacer esta demostración siga los siguientes pasos:



2.5	Usando la hoja de papel milimétrico haga un dibujo aproximado de las crestas a un tiempo $t = 5$ s, suponiendo que la primera piedra golpeó el agua al tiempo $t = 0$.	2 puntos

Solución:

Deben realizar un dibujo como el de la figura en el papel milimétrico que se les dió. Deben darse cuenta en que $t = 5$ s la primera onda ya viajó un radio $R_1 = v_s(5s)$, la segunda $R_2 = v_s(4s)$, etc, pero que los centros están recorridos por $d = v_f \tau$. Como $v_f > v_s$, los círculos ya no quedan dentro uno de otro sino que se traslapan.

Se dará 1 punto si notan que los círculos ya no son concéntricos y 1 punto por hacer el dibujo correcto. Se podrán deducir hasta 0.5 puntos por dibujos mal hechos pero que sí explicaron bien.

2.6	Uniendo con una recta tangente los puntos más extremos y adelantados de las crestas, encuentre una expresión para el ángulo θ que hace la dirección de propagación de dicha tangente con el eje de las x, y evalúelo.	2 puntos

Solución:

De la figura de la pregunta 2.5 se nota que los puntos más adelantados de todas las ondas, después de un tiempo t, se pueden unir por una recta tangente a las crestas, hasta donde va la última cresta. Estes se llama el frente de onda. La dirección de propagación de dicho frente es una recta perpendicular al frente. Esa perpendicular hace un ángulo θ con el eje de las x. Para calcularlo tomamos cualquier círculo. Sea d la distancia de su centro al punto donde se cortan la tangente y el eje de las x. Sea R el radio de dicho círculo. Debido a que la recta es tangente al círculo, el radio R desde el origen al punto tangente hace un ángulo recto con la recta tangente. Por simple trigonometría podemos hallar el coseno del ángulo,

$$\cos\theta = \frac{R}{d} \tag{34}$$

Sin embargo, el círculo viaja a velocidad v_s, por lo que

$$R = v_s t \tag{35}$$

Por otro lado, las piedritas se mueven a velocidad v_r. Por lo tanto, la distancia d es

$$d = v_r t \tag{36}$$

y el ángulo es,

$$\cos\theta = \frac{v_s}{v_r} \tag{37}$$

Como $v_s = 2.5$ m/s y $v_r = 5.0$ m/s, se halla $\cos\theta = 1/2$, o sea $\theta = \pi/3 = 60^o$.

Se dará 1.5 punto por el análisis téorico hasta la fórmula y 0.5 por hallar el valor numérico correcto. Es posible que no escriban la fórmula y de su dibujo bien hecho hallen el ángulo. En tal caso se les dará los 2 puntos. Si hallan que es la recta tangente correcta en el dibujo pero ya no pueden hacer el nálisis, se les dará 1 punto.

Las preguntas (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) ilustran el efecto Doppler, mientras que las (2.5) y (2.6) el efecto Cerenkov. Este último provee una explicación sencilla de las estelas que dejan los barcos al moverse en el mar.

Problema 3 Modelo de Bohr, Centro de Masa (10 puntos)

Hace 100 años, en 1913 el físico danés Niels Bohr desarrolló un modelo para describir el átomo de hidrógeno. El principal motivo de Bohr fue el de explicar las lineas espectrales que se estaban observando en los gases de hidrógeno al hacer pasar una corriente eléctrica sobre ellos. Estas líneas espectrales tienen su origen en las propiedades cuánticas de los átomos. Cuando se hace pasar una corriente eléctrica en un gas, los electrones de cada átomo son excitados, esto quiere decir que adquieren energía (ganan energía), pero después de un breve lapso de tiempo pierden esta energía y regresan a su estado inicial emitiendo la energía que ganaron en forma de radiación (luz), lo que explica las lineas observadas en los espectros del gas de hidrógeno, en la figura 9 se muestra el espectro de un gas de hidrógeno donde se aprecian claramente las lineas espectrales.

Figura 9: Lineas espectrales en un gas de hidrógeno

El átomo de hidrógeno consiste en un protón que compone su núcleo y un electrón girando en órbitas circulares alrededor del protón, ver figura 10. El protón tiene una carga eléctrica $q_p = e$ y el electrón tiene la misma carga pero de signo contrario $q_e = -e$. Donde e es la carga eléctrica elemental cuyo valor es: $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C. Al estar cargados eléctricamente, el protón y el electrón se atraen por ley de Coulomb.

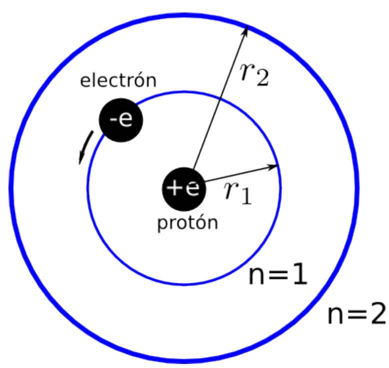


Figura 10: Modelo del átomo de Hidrógeno, el electrón gira en órbitas circulares alrededor del protón.

En su modelo del átomo de hidrógeno, Bohr estableció que el electrón gira alrededor del protón en órbitas circulares en las que su radio r_n, su velocidad v_n y su energía total E_n pueden tomar únicamente los siguientes valores:

$$\begin{aligned} r_n &= a_0 n^2 \\ v_n &= v_0 n \\ E_n &= -\frac{E_0}{n^2} \end{aligned}, \qquad \text{donde } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{38}$$

Donde a_0, v_0 y E_0 son valores constantes y n puede tomar cualquier valor entero positivo. Cada órbita en la que gira el electrón representa un *estado* y esta determinado por el valor de n (*número cuántico principal*). En la figura 10 se muestra el esquema de las órbitas permitidas del átomo de hidrógeno para los dos primeros estados $n = 1$, 2.

Estas propiedades son el resultado de un principio único que establece que las órbitas en las que puede girar el electrón son aquellas cuyo momento angular L sea múltiplo de una constante: $L = n\frac{h}{2\pi}$, esta es la regla de cuantización del momento angular. El momento angular de una partícula se define como: $L = mvr$, donde m es la masa de la partícula, v es su velocidad tangencial y r es el radio orbital.

Primer estado $n = 1$

En el primer estado $n = 1$, la regla de cuantización del momento angular queda establecida por la siguiente ecuación:

$$m_e v_0 a_0 = \frac{h}{2\pi}, \tag{39}$$

donde $h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s}$, es la constante de Planck y $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg es la masa del electrón; v_0 y a_0 corresponden a la velocidad y el radio orbital del electrón alrededor del protón en el primer estado ($n = 1$).

Si la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene al electrón girando en su órbita circular alrededor del protón.

$\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9\,\mathrm{Nm^2/C^2}$

3.1	Demuestra que el valor del radio orbital del electrón en su primer estado a_0, esta dado por la siguiente expresión y calcula su valor: $$a_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{m_e\pi e^2} \tag{40}$$ Si te sirve, puedes hacer uso de la siguiente definición: $$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.05 \times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s} \tag{41}$$	2 puntos

Solución:

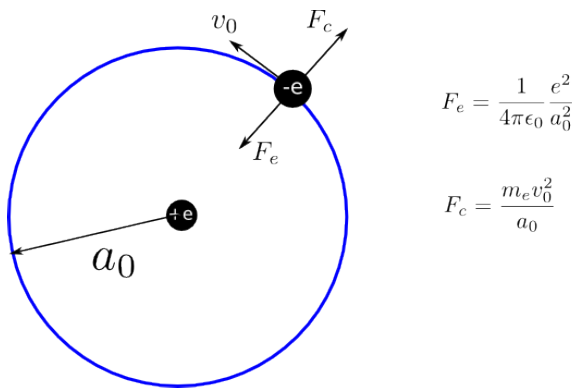


Figura 11: Primer órbita permitida en el átomo de Bohr $n = 1$.

(0.25) puntos por escribir la fuerza de Coulomb protón-electrón:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2} \tag{42}$$

(0.25) puntos por escribir la fuerza centrípeta del electrón:

$$F_c = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r \tag{43}$$

(0.25) puntos por igualar la fuerza centrípeta con la de Coulomb:

$$\frac{m_e v_0^2}{a_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2} \tag{44}$$

(0.75) puntos por llegar al resultado final (46)**.**
La ecuación (44) junto con la regla de cuantización, ecuación (39), determinan el valor de a_0 como sigue:

$$\begin{aligned} m_e v_0 a_0 &= \frac{h}{2\pi} \\ \frac{m_e v_0^2}{a_0} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_e v_0 a_0 &= \frac{h}{2\pi} \\ m_e v_0^2 a_0 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m_e^2 v_0^2 a_0^2 &= \frac{h^2}{4\pi^2} \\ m_e v_0^2 a_0 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \tag{45}$$

dividiendo ambas ecuaciones se obtiene el resultado:

$$\boxed{a_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{m_e\pi e^2} = \frac{\epsilon_0\left(2\pi\hbar\right)^2}{m_e\pi e^2} = \frac{4\pi\epsilon_0}{m_e}\frac{\hbar^2}{e^2}} \tag{46}$$

(0.5) punto por obtener el valor correcto del radio a_0
Sustituyendo valores:

$$a_0 = \frac{1}{\left(9\times 10^9 \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2\right)\left(9.1\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\right)} \frac{\left(1.05\times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s}\right)^2}{\left(1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{C}\right)^2} = 5.25\times 10^{-11}\,\mathrm{m} \tag{47}$$

El calculo se puede simplificar haciendo de la siguiente manera (omitiendo unidades):

$$\frac{1}{9\times 9.1\times 10^{-22}} \frac{(1.05)^2}{(1.6)^2} \frac{10^{-68}}{10^{-38}} = \frac{1.1}{81.9\times 2.56}\times 10^{-8} = 5.2\times 10^{-2}\times 10^{-8} = 5.25\times 10^{-11} \tag{48}$$

Movimiento respecto del centro de masa.

El modelo del átomo de hidrógeno descrito hasta ahora supone que el protón esta fijo y el electrón gira en torno al protón en una órbita circular. Sin embargo esto es solo una aproximación ya que en general tanto el protón como el electrón giran en torno a un punto fijo llamado Centro de Masa (CM). Analizaremos ahora como se modifican el valor de la separación entre el protón y el electrón en el primer estado ($n = 1$) calculado en el inciso anterior, pero tomando en cuenta el movimiento del protón y el electrón respecto de CM.

En la figura 12 se indica el movimiento del protón, cuya masa es $m_p = 1.6\times 10^{-27}$ kg y el electrón m_e en torno al centro de masa CM. Respecto del CM, el protón gira en una órbita circular de radio r_p y el electrón en una órbita de radio mayor r_e. Ambas partículas giran con la misma velocidad angular ω y la separación entre el protón y el electrón r es siempre constante, ver figura 12.

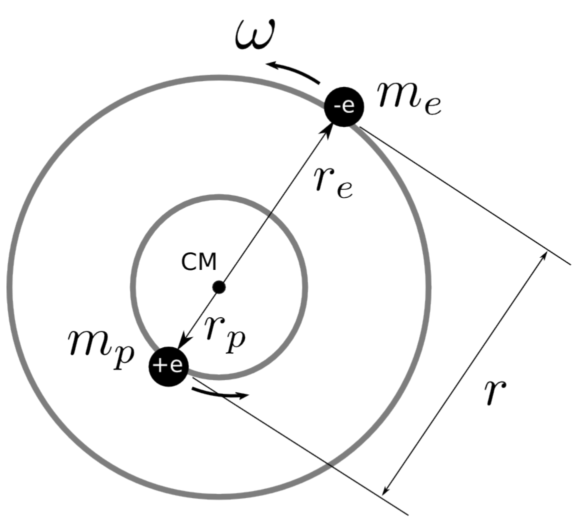


Figura 12: Movimiento del protón y del electrón en el átomo de hidrógeno respecto del centro de masa.

3.2	Encuentra las expresiones para el radio del electrón r_e y del protón r_p en términos de la masa del protón m_p, la masa del electrón m_e y la distancia que los separa r. Sugerencia: coloca el centro de masa en el origen.	1 puntos

Solución:
(0.25) puntos por escribir correctamente el centro de masa, ecuación (49)**.**
El protón y el electrón se mueven sobre una linea pero en direcciones opuestas, (ver figura 12), por lo tanto de la definición de centro de masa:

$$x_{cm} = \frac{m_p r_p - m_e r_e}{m_p + m_e}, \tag{49}$$

(0.25) puntos por colocar el centro de masa en el origen.
Si colocamos al CM en el origen entonces:

$$x_{cm} = \frac{m_p r_p - m_e r_e}{m_p + m_e} = 0, \qquad \Rightarrow \quad \frac{r_p}{r_e} = \frac{m_e}{m_p} \tag{50}$$

Puesto que la separación entre el protón y el electrón es r, entonces:

$$r_a + r_p = r \tag{51}$$

(0.5) puntos los resultados finales (52)**.**
De la ecuación anterior y la ecuación (50) se obtienen las expresiones que se piden:

$$\boxed{\begin{aligned} r_e &= \frac{r\,m_p}{m_e + m_p} = r\,\frac{\mu}{m_e} \\ r_p &= \frac{r\,m_e}{m_e + m_p} = r\,\frac{\mu}{m_p} \end{aligned}} \tag{52}$$

donde se define $\mu \equiv \dfrac{m_p m_e}{m_e + m_p}$

3.3	Sea L_{cm} el momento angular total del protón y del electrón respecto del CM. Determina la expresión de L_{cm} en términos de las masas del protón y el electrón (m_p, m_e), de la distancia que los separa r y de la velocidad angular ω con que gira el sistema protón-electrón alrededor del centro de masa.	2 puntos

Solución:
(0.5) puntos por escribir la expresión del momento angular total L_{cm}
El momento angular del sistema protón-electrón respecto del CM esta dado por:

$$L_{cm} = L_p + L_e = (m_p v_p)\, r_p + (m_e v_e)\, r_e \tag{53}$$

(0.25) puntos escribir la definición de la velocidad angular.
Ambos giran con la misma frecuencia ω por lo que

$$\omega = \frac{v_p}{r_p} = \frac{v_e}{r_e} \tag{54}$$

(0.25) puntos sustituir la velocidad angular (54) **en la expresión del momento ángular total** (53) **y llegar a la ecuación** (55)**.**
Sustituyendo en la expresión del momento angular total:

$$L = (m_p \omega r_p)\, r_p + (m_e \omega r_e)\, r_e = \omega \left(r_p^2 m_p + r_e^2 m_e\right) \tag{55}$$

(1) punto por obtener el resultado final (56)**.**
Ahora, usando el resultado (52) se obtiene la expresión:

$$\boxed{\begin{aligned} L &= \omega \left(r_p^2 m_p + r_e^2 m_e\right) = \omega \left[m_p \frac{r^2 \mu^2}{m_p^2} + m_e \frac{r^2 \mu^2}{m_e^2} \right] \\ &= \omega r^2 \mu^2 \left[\frac{1}{m_p} + \frac{1}{m_e} \right] = \mu \omega r^2 = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \omega r^2 \end{aligned}} \tag{56}$$

Consideremos nuevamente el primer estado del átomo de hidrógeno ($n = 1$), pero haciendo el análisis desde el centro de masa. Denotemos en este caso r_0 a la distancia entre el protón y el electrón en el primer estado ($n = 1$). Entonces en el primer estado $n = 1$, la regla de cuantización del momento angular queda establecida por:

$$L_{cm} = \frac{h}{2\pi} \tag{57}$$

Esta expresión es similar a la ecuación (39), excepto que ahora L_{cm} es el momento angular total del protón y del electrón respecto de CM (L_{cm} la obtuviste en el inciso anterior).

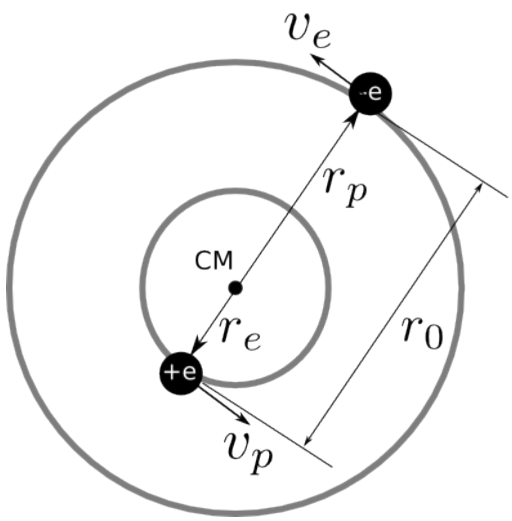


Figura 13: Primer estado $n = 1$ del átomo de hidrógeno visto desde el CM.

3.4	Usando la regla de cuantización del momento angular respecto del centro de masa, ecuación (57), demuestra que la expresión de la distancia entre el protón y electrón r_0 esta dada por la siguiente expresión y calcula su valor: $$r_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{\mu\pi e^2}, \qquad \text{donde} \quad \mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} \tag{58}$$ Considera de nuevo que la fuerza eléctrica de Coulomb entre el protón y el electrón es la que mantiene girando al protón y al electrón alrededor del CM.	3 puntos

Solución:
La velocidad angular es la misma para el protón y el electrón: $\omega = \frac{v_e}{r_e} = \frac{v_p}{r_p}$.

(0.25) escribir la fuerza centrípeta del electrón y/o protón.
La fuerza centrípeta del protón y del electrón, respecto del CM, están dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \text{fuerza centripeta del electrón:} \quad F_{c,e} =& \frac{m_e v_e^2}{r_e} \\ \text{fuerza centripeta del protón:} \quad F_{c,p} =& \frac{m_p v_p^2}{r_p} \end{aligned} \tag{59}$$

(0.25) puntos por escribir la fuerza de Coulomb protón-electrón.
La fuerza eléctrica entre portón-electrón esta dada por:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} \tag{60}$$

(0.25) puntos por igualar la fuerza centrípeta con la de Coulomb.
Esta fuerza es la que mantiene girando al protón y al electrón alrededor del CM y por lo tanto igual a la fuerza centrípeta del electrón o del protón:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = \frac{m_e v_e^2}{r_e} \qquad \text{o} \qquad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} = \frac{m_p v_p^2}{r_p} \tag{61}$$

(0.25) puntos por plantear el siguiente sistema de ecuaciones:
Usando la primer expresión junto con el resultado (56) se obtienen las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ \frac{m_e v_e^2}{r_e} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_0^2} \end{aligned} \tag{62}$$

(1.5) llegar al resultado final (65).
Estas dos ecuaciones junto con las expresiones: $r_e = r_0 \frac{\mu}{m_e}$, $\quad \omega = \frac{v_e}{r_e}$ se obtiene el resultado final. Hay que expresar ambas ecuaciones en términos de r_0 (que no aparezca r_e)

$$\begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ \frac{m_e v_e^2}{r_e} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{r_0^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ \frac{m_e\left(\omega r_e\right)^2}{r_e} r_0^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ m_e\omega^2 r_e r_0^2 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} \mu\omega r_0^2 &= \frac{h}{2\pi} \\ m_e\omega^2\frac{\mu}{m_e} r_0^3 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \mu^2\omega^2 r_0^4 &= \frac{h^2}{4\pi^2} \\ \omega^2\mu r_0^3 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \end{aligned} \tag{64}$$

Finalmente dividimos ambas ecuaciones y se obtiene:

$$\mu r_0 = \frac{h^2}{4\pi^2}\frac{4\pi\epsilon_0}{e^2}, \quad \Rightarrow \quad \boxed{r_0 = \frac{h^2\epsilon_0}{\mu\pi e^2}} \tag{65}$$

(0.5) puntos por obtener el valor correcto de la masa reducida μ e identificar que igual al de la masa del electrón y por lo tanto el radio r_0 no cambia respecto del valor de a_0
Este resultado es similar a la ecuación (40), solo cambia la masa $m_e \to \mu$:

$$\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg} \tag{66}$$

No se aprecia diferencia entre la masa reducida μ y la masa del electrón $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, por lo que da el mismo resultado!!

El positronio es un sistema de dos partículas, un positrón y un electrón, que giran alrededor de su centro de masa debido a la atracción eléctrica entre ambas partículas. El positrón es la antipartícula del electrón, esto significa que el positrón tiene la misma masa que el electrón: $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg, pero su carga es de signo contrario a la del electrón.

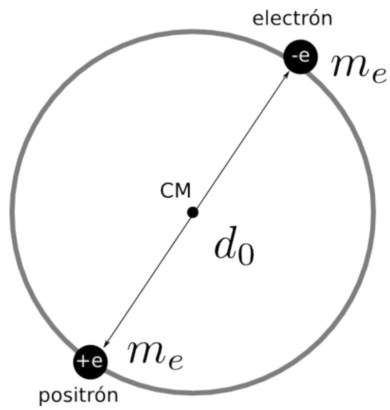


Figura 14: Primer estado del positronio: un electrón y un positrón girando alrededor de su centro de masa, ambas partículas tienen la misma masa $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg y la misma carga $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C pero de signos contrarios. La distancia de separación entre el prositrón y el electrón es d_0.

3.5	Si denotamos como d_0 a la distancia que separa al positrón del electrón en el positronio cuando esta en el primer estado ($n = 1$), como se muestra en la figura 14. Usando los resultados anteriores, calcula el valor de la distancia d_0.	2 puntos

Solución:

(0.5) puntos por calcular la masa reducida del sistema del positronio.

En el sistema del positronio la masa reducida es (el positrón y el electrón tienen la misma masa m_e):

$$\mu = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{m_e}{2} = 4.65 \times 10^{-31}\,\text{kg} \tag{67}$$

(0.5) puntos por obtener la ecuación (68)**.**

usando la ecuación (58) se obtiene la distancia de separación entre el electrón y el positrón:

$$d_0 = \frac{h^2 \epsilon_0}{\mu \pi e^2} = \frac{h^2 \epsilon_0}{\frac{m_e}{2} \pi e^2} = 2 \frac{h^2 \epsilon_0}{m_e \pi e^2} \tag{68}$$

(1) punto por obtener el valor correcto d_0

En el resultado anterior se identifica la expresión del primer inciso, ecuación (40) para obtener:

$$\boxed{d_0 = 2a_0 = 2\left(5.25 \times 10^{-11}\,\text{m}\right) = 10.5 \times 10^{-11}\,\text{m}} \tag{69}$$

OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
OAXACA
Noviembre - 2014
EXAMEN EXPERIMENTAL
CIRCUITO RC

Un condensador eléctrico o capacitor es un dispositivo utilizado en electricidad y electrónica, capaz de almacenar energía sustentando un campo eléctrico. Está formado por un par de superficies conductoras, generalmente en forma de dos láminas o placas paralelas separadas por un material dieléctrico.

Al aplicar un voltaje V_0 en el capacitor, la diferencia de potencial entre sus placas aumentará hasta igualar la de la fuente, es decir alcanzará el voltaje V_0. Esto se debe a que una de las placas del capacitor adquiere carga positiva y la otra carga negativa. Por lo tanto, la corriente entrará en el condensador hasta que las placas ya no puedan almacenar más carga por haber alcanzado equilibrio electrostático con la fuente V_0 y, de esta forma, una placa del capacitor quedará con una carga positiva final y la otra con carga negativa final, iguales en magnitud entre ellas.

La cantidad de energía eléctrica que puede almacenar un capacitor para una diferencia de potencial dada es llamada *capacitancia*, denotada por C y sus unidades son los *faradios*. Un faradio (F) es la capacidad de un condensador entre cuyas placas hay una diferencia de potencial de 1 volt (V) cuando cada placa tiene una carga (positiva o negativa) de un coulomb (Coulomb = A s, donde A es ampere y s segundo), es decir,

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}}.$$

Recuerde que 1 ampere (A) es la unidad de corriente eléctrica I y que 1 Ohm (Ω) es la unidad de resistencia eléctrica R que los conductores presentan ante la corriente cuando se tiene un voltaje V, tal que se obedece la Ley de Ohm $V = RI$. Así, la unidad de resistencia Ohm (Ω) se puede escribir como

$$\Omega = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}.$$

Por lo tanto, notamos que el producto de capacitancia por resistencia RC tiene unidades de tiempo (ΩF = s). A la cantidad RC se le llama la *constante de tiempo* de un circuito RC, que es el dispositivo que estudiaremos en este problema.

El llamado circuito RC es un circuito compuesto de resistencias y condensadores alimentados por una fuente eléctrica. Un circuito RC, en su forma más simple, está compuesto de una resistencia y un condensador, como se muestra en la Figura 1:

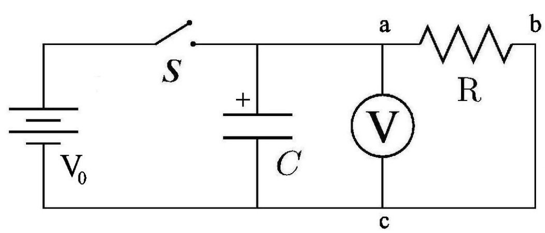


Figura 1: Diagrama básico de un circuito RC.

donde V_0 es la fuente de energía que provee un voltaje V_0 al circuito; en este caso, dicha fuente es una batería comercial. El capacitor se indica por la letra C y la resistencia por R. Se muestra también el interruptor con la letra S. En la Figura 2 se muestra una fotografía del dispositivo, así como de las conexiones, como se explica más abajo.

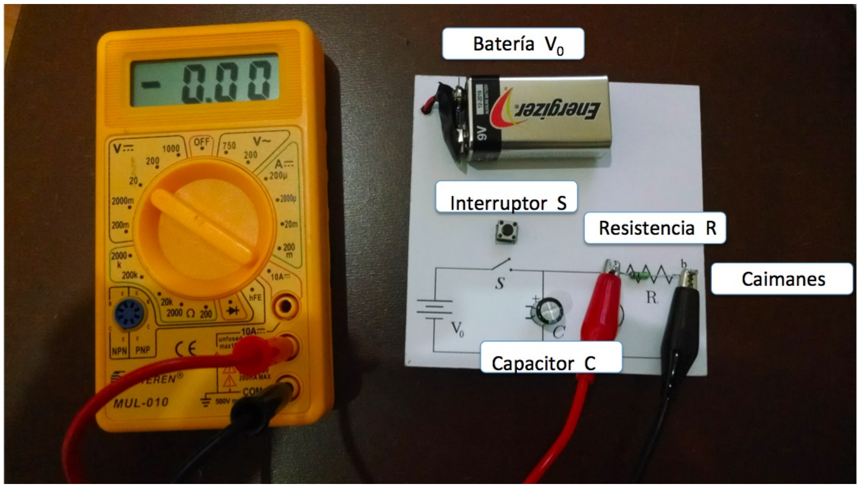


Figura 2: Fotografía del multímetro y del dispositivo RC, indicando las componentes así como la conexión de las puntas de los caimanes.

Es importante resaltar que el interruptor sólo funciona mientras se mantenga oprimido. Por lo tanto, al oprimir el interruptor S se cierra el circuito y el capacitor se carga casi instantáneamente, de tal manera que placas adquieren una diferencia de potencial V_0. Al dejar de oprimir el interruptor se abre el circuito, es decir, la batería deja de alimentar el circuito y la corriente circula a través de la resistencia R y el capacitor disminuirá su voltaje de acuerdo a la siguiente relación:

$$V(t) = V_0\, e^{-t/RC}. \tag{1}$$

Es aquí donde notamos que el producto RC es la constante de tiempo del circuito RC, es decir, el tiempo característico en el que el capacitor pierde el 37 % de su carga.

El objetivo principal del experimento es obtener la curva de descarga del capacitor y, de ella (conociendo el valor de una resistencia R_1), obtener el valor de la capacitancia C. Posteriormente, con esta información y con el uso de otra resistencia R_2, verificaremos que la ley dada por la ecuación (1) es correcta.

Material:

- Multímetro. Este es un instrumento para medir propiedades eléctricas, ver el apartado de su uso.
- Cables con caimanes y puntas, uno rojo y uno negro, ver el apartado para el uso del multímetro.
- Cronómetro
- Tabla de circuito. Incluye una batería con voltaje V_0, el capacitor C, la resistencia R_1 y un interruptor S, montados y conectados. Vea la Figura 2.
- Resistencia R_2.
- Papel milimétrico
- Reglas

IMPORTANTE: Antes de comenzar lee el apartado sobre el **Uso del Multímetro**.

Tareas:

Verifica que en la parte posterior del dispositivo las conexiones corresponden al diagrama de la Figura 1. En particular, nota que los puntos **b** y **c** están interconectados, de tal manera que ambos tienen la misma diferencia de potencial (voltaje) respecto al punto **a**. Es decir, ambos puntos (**b** y **c**) pueden considerarse como el mismo punto. Mantén la tabla del circuito sobre la base de esponja para evitar daños al dispositivo.

1. Coloca el multímetro en modo de voltaje DC (20 V). Conecta las puntas de los cables rojo y negro al multímetro. Conecta los caimanes a los puntos puntos **a** y **b** como se muestra en la Figura 2. Manteniendo oprimido el botón del interruptor $\boldsymbol{S}$ toma la lectura del voltaje V_0 y repórtalo.
   0.5 puntos

2. Sin desconectar el multímetro suelta el botón y observa la lectura de voltaje en el multímetro. Notarás que comienza a decrecer y vuelve a V_0 si oprimes el botón nuevamente. Iniciando con el voltaje V_0, anota el tiempo que tarda el capacitor en descargarse desde el valor V_0 hasta que llegue a 7 V. Debido a que es difícil repetir exactamente tal medición, toma varias medidas, al menos 5, y promedia. Reporta tal valor con su incertidumbre.
   1.5 puntos

3. Diseña un método para obtener una tabla de voltaje (V) vs tiempo (t), de modo que en $t = 0$, $V = V_0$ y al tiempo t se tiene $V(t)$. Describe tu procedimiento y toma en cuenta la dificultad en medir el tiempo. Reporta tus mediciones en una tabla, indicando cuidadosamente las unidades. Realiza entre 8 y 10 mediciones del voltaje $V(t)$, usa la tabla de la página 4.
   5 puntos

4. A partir de la tabla del inciso anterior elabora una gráfica. Se cuidadoso al rotular los ejes indicando las unidades.
   2.5 puntos

5. Realiza el cambio de variable adecuado para obtener una recta con tus datos. Haz la tabla apropiada y realiza la gráfica correspondiente.
   2.5 puntos

6. La resistencia R_1 es la que está montada sobre la tabla del circuito. Retírala y mídela con el multímetro (no olvides colocar el selector de función en la escala adecuada). Reporta el valor de R_1 con su incertidumbre.
   0.5 puntos

7. A partir del análisis de la recta, calcula la constante de tiempo dada por el producto RC y reporta el valor de la capacitancia C del capacitor. Da al menos tres cifras significativas.
   2.5 puntos

8. Verifica ahora que tanto la ecuación (1) como el valor de la capacitancia son correctos. Para esto utilizarás la resistencia R_2. Usando las resistencias R_1 y R_2 conéctalas en un caso en serie y otro en paralelo. Haz un diagrama en cada caso. Halla en cada caso el tiempo promedio que tarda en descargarse el capacitor desde V_0 hasta un voltaje de 7 V y repórtalo.
   3 puntos

9. Del resultado anterior, calcula el valor de la resistencia total, tanto para el caso en paralelo como en serie, y repórtalas. Usando el multímetro mide directamente la resistencia total en cada caso y compáralas con los valores calculados.
   2 puntos

Tabla del inciso 3.

Uso del Multímetro

Un multímetro es un instrumento electrónico para medir directamente, entre otras cosas, magnitudes eléctricas activas como corrientes y voltajes o pasivas como resistencias. Las medidas pueden realizarse para corriente continua o alterna y en varios márgenes de medida cada una.

En la tarea que nos ocupa, mediremos resistencias y voltajes, de modo que utilizaremos las dos conecciones inferiores para conectar las puntas o caimanes, como se muestra en la figura 3 (la conexión extra se utiliza para medir altas corrientes, hasta 10 A).

Figura 3: Fotografía de un multímetro indicando la conexión de las puntas de los caimanes.

En la figura 3 se muestra, además de la conexión correcta de las puntas, el selector de función en la posición de apagado (OFF).

Para medir voltajes se debe colocar el selector en alguna de las posiciones señaladas con el símbolo V⎓ o DCV, a la izquierda de la posición de apagado. Cuando no se sabe de qué orden es el voltaje que vamos a medir, se debe conectar la fuente de voltaje al multímetro (punta roja al positivo) y comenzar a medir empezando por la posición de mayor voltaje (1000 V, en este multímetro), e ir bajando hasta que la lectura tenga el mayor numero de cifras significativas.

Cuando el multímetro esté fuera de escala, es decir, la fuente tenga un mayor voltaje que el máximo rango de la selección (por ejemplo, la fuente sea de 10 V y el selector esté en 2000 mV), mostrará una lectura como en la figura 4.

Figura 4: Multímetro fuera de escala.

En nuestro caso, la fuente de voltaje es una batería de 9 V, de modo que podemos colocar el selector directamente en la posición de 20 V, como muestra la figura 5.

Figura 5: Posición para medir voltaje hasta de 20 V DC.

Para medir resistencia, se colocará el selector en alguna de las posiciones señaladas con Ω, en el cuadrante inferior izquierdo. Conectaremos la resistencia entre las puntas del multímetro y posicionaremos el selector en la posición de **menor** resistencia (200 Ω, en este multímetro, véase figura 6), y aumentaremos hasta que tengamos una buena lectura (con el mayor número de cifras significativas y dentro de escala).

Figura 6: Posición de menor resistencia (200 Ω).

En este caso, cuando el multímetro esté fuera de escala y muestre la lectura de la figura 4, se deberá a que la resistencia que deseamos medir tiene un valor mayor al máximo rango de la selección por ejemplo, la resistencia sea de 50 kΩ y el selector esté en 200 Ω.

IMPORTANTE: Siempre desconecta del circuito la resistencia a medir.

OLIMPIADA NACIONAL DE FISICA
OAXACA
Noviembre - 2014
EXAMEN EXPERIMENTAL
CIRCUITO RC

Solución:

1. Voltaje con el capacitor cargado $V_0 = (9.27 \pm 0.01)$ V.

   0.5 = 0.35 por el valor + 0.15 por la incertidumbre. Penalizar con 0.25 si faltan unidades o son incorrectas.

2. Se tomaron 5 mediciones de tiempo (en segundos) desde V_0 hasta 7 V. Las mediciones fueron:

13.32	13.23	13.31	13.71	13.48	s

   con promedio $\bar{t} = (13.41 \pm 0.24)$ s.

   1.5 = 0.2 por cada valor dentro del 20 % + 0.3 por el promedio + 0.2 por la incertidumbre (entre 0.1 y 0.7 s). Penalizar con 0.25 si faltan unidades o son incorrectas.

3. Se oprime el interruptor, se obtiene V_0, se suelta el interruptor y se deja que el capacitor se descargue hasta 8, 7, 6, ..., 1 V. Se toman 5 mediciones de tiempo en cada caso y se promedia el tiempo.

V(V)	t_1(s)	t_2(s)	t_3(s)	t_4(s)	t_5(s)	$\bar{t}$(s)	$\pm\Delta t(s)$
9.26	0	0	0	0	0	0	0
8.00	7.09	7.17	7.06	7.37	6.84	7.11	0.27
7.00	13.32	13.23	13.31	13.71	13.48	13.41	0.24
6.00	20.54	20.68	20.92	20.83	20.60	20.71	0.19
5.00	29.04	29.28	29.14	29.29	29.12	29.17	0.13
4.00	39.66	40.20	39.70	39.43	39.57	39.71	0.39
3.00	53.09	53.05	52.84	52.43	52.84	52.85	0.33
2.00	72.26	71.56	71.77	72.84	72.36	72.03	0.64
1.00	104.53	104.58	104.50	104.35	105.07	104.61	0.36

   La incertidumbre se calculó como:

$$\Delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{2} \qquad (1)$$

   0.625 puntos por cada renglón correcto (sólo calificar 8 renglones), se requiere: al menos 3 mediciones, el promedio y una incertidumbre razonable (entre 0.1 y 0.7 s). Además, los valores deben estar dentro del 20 % de los valores de la solución.
   Si se tienen menos de 3 mediciones, penalizar con 0.125, si no hay promedio, penalizar con 0.2, si no hay incertidumbre penalizar con 0.1, si no están dentro del 20 % penalizar con 0.1

4. Gráfica V/ V vs $\bar{t}$/ s

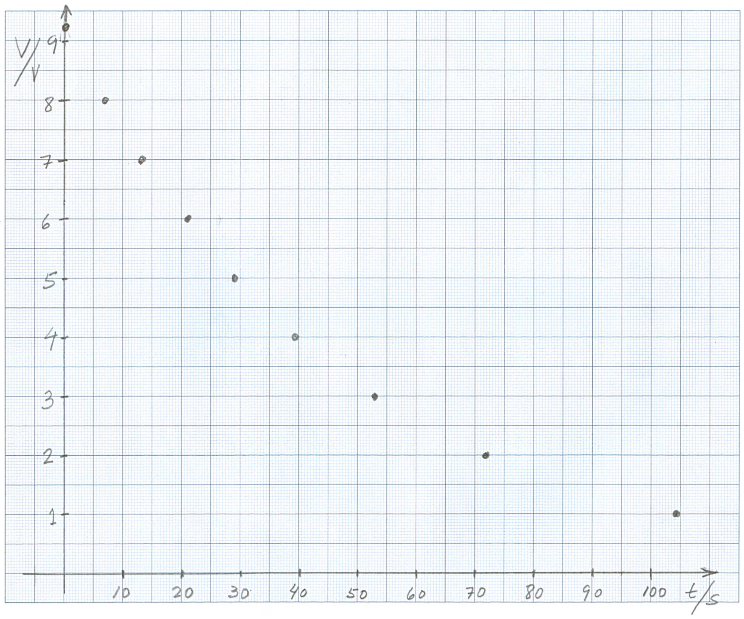


Figura 1: Gráfica V vs $\bar{t}$.

2.5 = 0.5 por rótulos en ejes (penalizar con 0.1 por eje con menos de 4 marcas) + 0.5 por unidades + 0.5 por area ocupada + 1.0 por puntos congruentes con la tabla. Penalizar con 0.1 por cada punto mal graficado.

5. A la ecuación,

$$V = V_0\, e^{-t/RC} \tag{2}$$

le tomamos el logaritmo y obtenemos,

$$\ln V = -\frac{1}{RC} t + \ln V_0 \tag{3}$$

La tabla es,

$\ln V$	$\bar{t}$(s)
2.22	0
2.08	7.11
1.95	13.41
1.79	20.71
1.61	29.17
1.39	39.71
1.10	52.85
0.69	72.03
0.00	104.61

Graficamos $\ln V$ vs t,

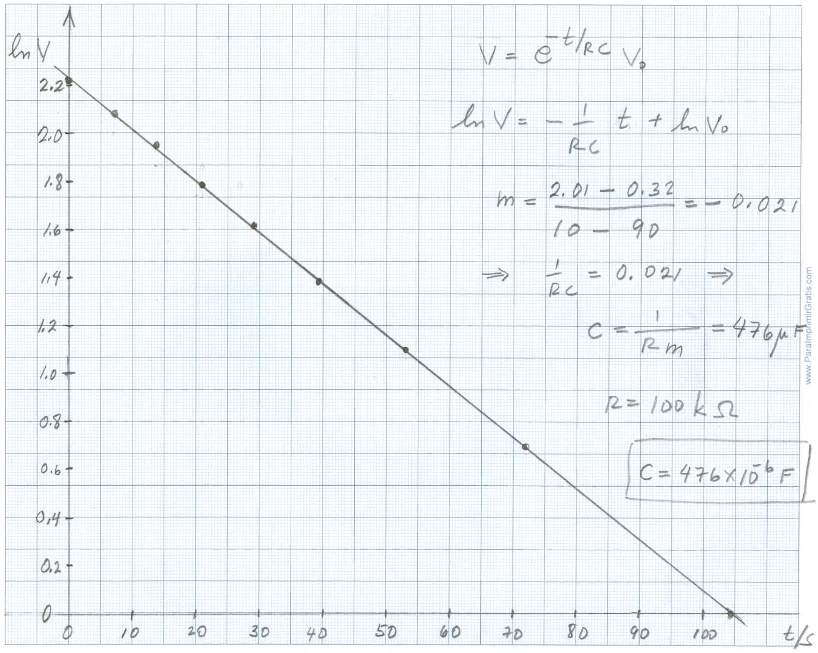


Figura 2: Gráfica $\ln V$ vs t.

2.5 = 1.0 cambio de variable correcto + 1.5 por la gráfica (0.4 por rótulos en ejes + 0.4 por unidades + 0.3 por area ocupada + 0.4 por puntos congruentes con los datos.)

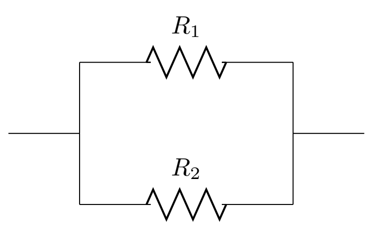
6. La resistencia es $R_1 = (100.0 \pm 0.1)$ k Ω.

   0.5 = *0.35 (valor) + 0.15 (incertdumbre). Penalizar con 0.25 si no hay unidades.*

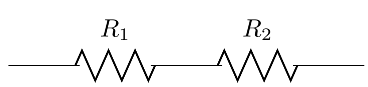
7. Del análisis gráfico obtenemos la pendiente $m = -0.021$. Sabemos que $m = -1/RC$. De aqui despejamos $C = -1/Rm$ y obtenemos $C = 476 \times 10^{-6}$ F, ó 476 μF. Este resultado es tan limpio que no se le puede calcular incertidumbre gráfica. El valor nominal es 470 microfaradios.

   2.5 = 1.5 por valor adecuado de la pendiente de la gráfica+ 0.3 por despejar C y hallar un valor + 0.2 por unidades correctas + 0.5 por el valor de C dentro del intervalo [458-482 μF].

8. Para el cálculo en paralelo la conexión es:



mientras que para la conexión en serie es:



Las medidas de tiempo de $V_0 = 9.27$ V a 7 V son, caso paralelo:

6.32	6.47	6.34	6.23	6.16	s

el promedio es $t = (6.30 \pm 0.16)$ s.

Para el caso en serie las medidas son,

21.71	21.03	20.82	21.49	21.26	s

el promedio es $t = (21.26 \pm 0.44)$ s.

3.0 = 0.5 por cada diagrama + 1.0 por cada caso (serie y paralelo) correcto, se requiere: al menos 3 mediciones, el promedio y una incertidumbre razonable (entre 0.1 y 0.7 s). Además, los valores deben estar dentro del 20 % de los valores de la solución.
Si se tienen menos de 3 mediciones, penalizar con 0.25, si no hay promedio, penalizar con 0.2, si no hay incertidumbre penalizar con 0.1, si no están dentro del 20 % penalizar con 0.1

9. Usando la ecuación (2) obtenemos para el caso en paralelo

$$R_T = \frac{t}{C\ln(V_0/V)} = 47122\,\Omega.$$

Comparamos con la medida directa (o teoría), es $R_T = 40.5\,\mathrm{k}\Omega$.

mientras que

$$R_T = \frac{t}{C\ln(V_0/V)} = 159018\,\Omega.$$

Comparamos con la medida directa $R_T = 168\,\mathrm{k}\Omega$.

2.0 = 0.5 por la fórmula de la resistencia + 0.25 por el valor de cada resistencia dentro del 30 % del valor medido con el multímetro + 0.5 por cada medida directamente.

Para verificar los tiempos, se puede emplear:

$$t(V) = R\,C\,\ln\left(\frac{\mathrm{V_0}}{\mathrm{V}}\right)$$

con

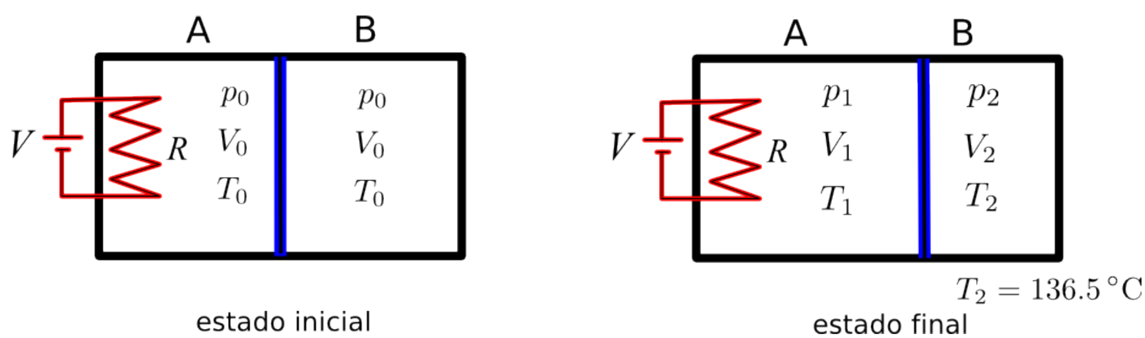
$$C = 470 \times 10^{-6}\,\mathrm{F}$$
$$R = 100 \times 10^{3}\,\Omega$$
$$R\,C = 47\,\mathrm{s}$$

entonces:

$$t(V) = 47\,\ln\left(\frac{\mathrm{V_0}}{\mathrm{V}}\right)$$

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Oaxaca 9-13 de noviembre de 2014
Prueba teórica

Problema 1 Transferencia de calor (10 puntos)



Un contenedor cilíndrico, fabricado de un material aislante al calor, y de volumen total $V = 44.8\,\mathrm{lt}$ está dividido en dos compartimentos (A y B de la figura) por una pared también perfectamente aislante al calor. Cada compartimento tiene un mol de Helio en estado gaseoso. Inicialmente, los dos compartimentos tienen el mismo volumen V_0 (dividen a la mitad el contenedor cilíndrico) y están a la misma temperatura $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$.

Con una resistencia eléctrica colocada en el compartimento A circula una corriente que genera calor lentamente por efecto Joule y cambia el estado termodinámico del sistema, es decir, el gas en los diferentes compartimientos cambian sus presiones, volúmenes y temperaturas. En particular, se encuentra que después de un tiempo t el gas en el compartimiento B ha alcanzado una temperatura de $T_2 = 136.5\,°\mathrm{C}$.

El propósito de este problema es calcular ese tiempo t en el que la resistencia eléctrica confiere calor al sistema, sabiendo que dicha resistencia tiene el valor $R = 242\,\Omega$ y que está conectada a una fuente de voltaje de 220 V.

Los siguientes pasos pueden ser de utilidad en dicho cálculo.

Denotemos los valores finales en las variables del gas en cada compartimento de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c}\text{valores finales:}\\ \text{compartimento A:}\quad (p_1, V_1, T_1) \qquad\qquad \text{compartimento B:}\quad (p_2, V_2, T_2)\end{array} \tag{1}$$

donde, como ya se mencionó, $T_2 = 136.5\,°\mathrm{C}$.

Recuerda que en un gas ideal hay cuatro procesos básicos con las siguientes propiedades:

proceso	propiedad	ecuación que satisface el proceso
isotérmico	T es constante	$pV =$ constante
isobárico	p es constante	$\dfrac{V}{T} =$ constante
isocórico	V es constante	$\dfrac{p}{T} =$ constante
adiabático	$Q = 0$, no hay flujo de calor	$TV^{\gamma-1} =$ constante

donde $\gamma = c_p/c_V$;
c_v y c_p es la capacidad calorífica molar a volumen constante y presión constante respectivamente.
Para el Helio en estado gaseoso: $c_v = \dfrac{3}{2}R$ y $c_p = \dfrac{5}{2}R$
La constante universal de los gases ideales es: $R = 8.31$ J/Kmol;

1.1	**Pregunta:** Determina la presión y el volumen final del compartimento B (p_2, V_2)	3 puntos

1.2	**Pregunta:** Determina la presión, volumen y temperatura finales del compartimento A (p_1, V_1, T_1)	2 puntos

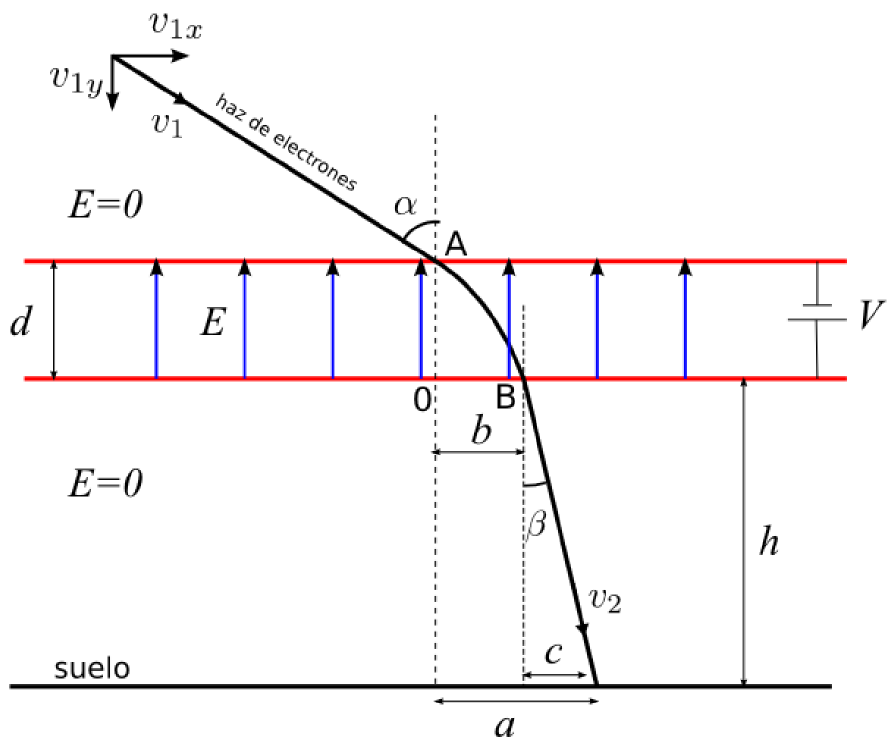
1.3	**Pregunta:** Determina el cambio de energía en ambos compartimentos.	2 puntos

1.4	**Pregunta:** Usando que la resistencia del compartimento A tiene el valor $R = 242\,\Omega$ y que está conectada a una fuente de voltaje de 220 V, determina el tiempo t necesario que le toma a la resistencia generar el calor necesario para realizar el proceso descrito. ¿Existe trabajo W_A y W_B entre los compartimientos, durante el proceso? Si sí, ¿Cuál es la relación entre dichos trabajos?	3 puntos

Problema 2 **Refracción de electrones**	**(10 puntos)**

Se tiene un haz de electrones que incide, a un ángulo α, sobre un par de placas paralelas que se encuentran a un potencial V (un condensador), ver figura. El haz incide en el punto A de la placa superior como se muestra en la figura y es desviado dentro de las placas, debido a que el campo eléctrico E entre las placas produce una fuerza sobre los electrones, hasta el punto B de la placa inferior. En ese punto el haz emerge fuera de las placas con un ángulo β. Considera que los electrones pueden cruzar las placas paralelas sin ser afectadas, es decir, sólo las desvía el campo eléctrico. Nota también que en la dirección horizontal no hay fuerzas sobre los electrones del haz. Desprecia cualquier efecto de la gravedad.

El problema general consiste en determinar la distancia horizontal a a la cual es proyectado el haz de electrones en el suelo, respecto de la linea vertical donde incide el haz en la placa superior.



2.1	**Pregunta** Suponiendo que la magnitud de la velocidad del haz incidente es v_1 y que el ángulo de incidencia es α, demuestra que si la magnitud de velocidad de haz desviado (refractado) es v_2 con ángulo β con respecto a la vertical, se satisface la siguiente relación: $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_2}{v_1} \quad (2)$$	2 puntos

La expresión (**??**) es semejante a la ley de Snell que describe la refracción de la luz cuando atraviesa la interfase entre dos medios de índice de refracción diferentes.

Considera que el haz de electrones incidente tiene una velocidad inicial $v_1 = 1.5 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$ y que hace un ángulo $\alpha = 70°$ respecto de la normal de las placas. Considera también que las placas del condensador están separadas una distancia $d = 10\,\mathrm{cm}$ y están conectadas a una diferencia de potencial $V = 300\,\mathrm{V}$

2.2	**Pregunta** Encuentra el tiempo t_v que tarda un electrón perteneciente al haz, en atravesar las placas paralelas; es decir, el tiempo de ir del punto A al punto B.	3 puntos

2.3	**Pregunta** Calcula la distancia b que es desviado el haz de electrones dentro de las placas. Ver figura, $b = \overline{OB}$.	2 puntos

2.4	**Pregunta** Si la altura a la que se encuentra la placa inferior del condensador con respecto al piso es $h = 1\,\mathrm{m}$, determina la distancia total a que se desvía el haz hasta llegar al suelo (ver figura).	3 puntos

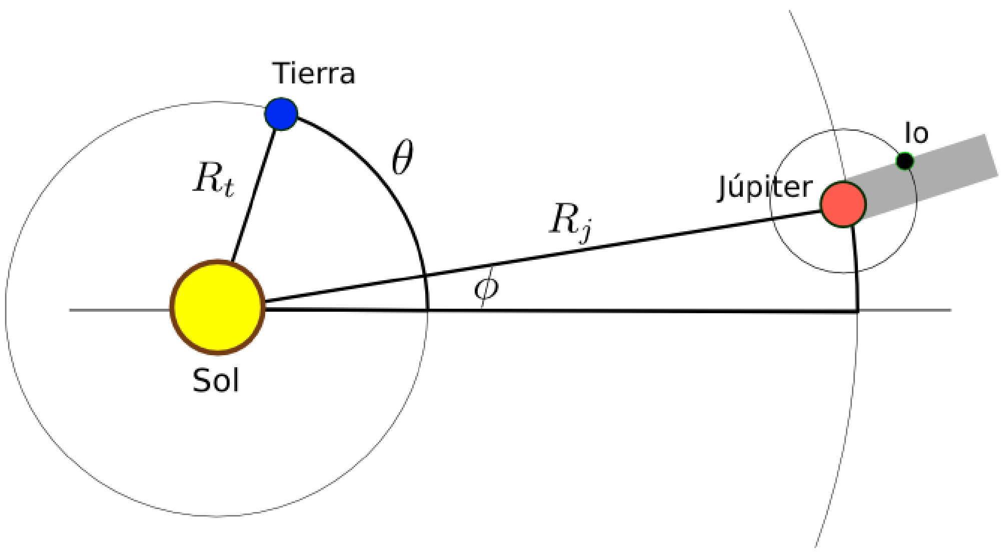
DATOS

carga del electrón	$e = -1.6 \times 10^{-19}$ C
masa del electrón	$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg

Problema 3 Velocidad de la Luz, experimento de Romer (10 puntos)

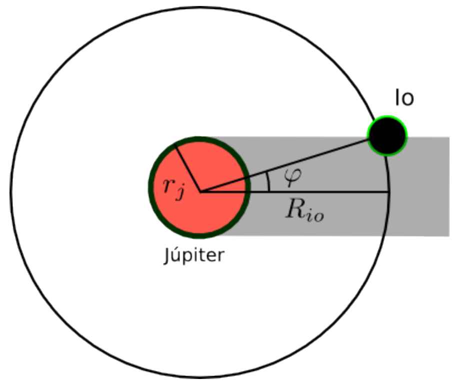
En el año 1676 el astrónomo danés Ole Roemer realizó la primera medición de la velocidad de la luz. En las observaciones hechas por Romer de la luna Io de Júpiter había notado que la duración de los eclipses del satélite se hacían más cortos conforme la Tierra se acercaba a Júpiter y por el contrario se hacían más largos conforme se alejaban. Estas discrepancias, conjeturó Romer, se podían explicar suponiendo que la velocidad de la luz era finita y no infinita como se creía entonces. Es decir, la discrepancia se debía al tiempo adicional que le toma a la luz viajar entre la Tierra y Júpiter. Este problema consiste en determinar la velocidad de la luz de acuerdo al razonamiento de Roemer.

En la figura se observa la configuración en un momento dado del Sol, la Tierra, Júpiter y su satélite Io. En todo el problema supondremos que el Sol está fijo en un punto, mientras que la Tierra y Júpiter giran alrededor del Sol en órbitas circulares (en general son órbitas elípticas, pero por simplicidad suponemos que son circunferencias) cuyos radios son R_T y R_J, respectivamente. En la figura se muestra también la sombra que proyecta Júpiter sobre una parte de la órbita de Io, lo que provoca el eclipse de Io.



De la figura también se puede ver que durante la mitad de la trayectoria de la Tierra, es decir durante medio año, un observador en la Tierra sólo puede ver cuando Io emerge de la sombra proyectada de Júpiter, ya que el mismo Júpiter impide ver cuando entra en la sombra de Júpiter. Lo contrario sucede la siguiente mitad de la trayectoria, el siguiente medio año, cuando solo se puede observar la entrada en la sombra de Júpiter y no su salida de ella.

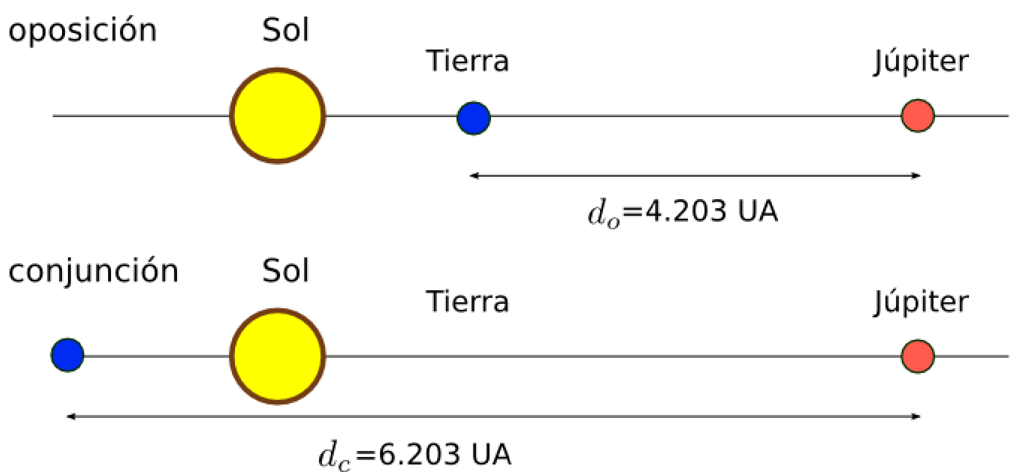
Primero analicemos el sistema de Júpiter y su luna Io. Para ello se ilustra este sistema en la siguiente figura y se plantean las siguientes preguntas.



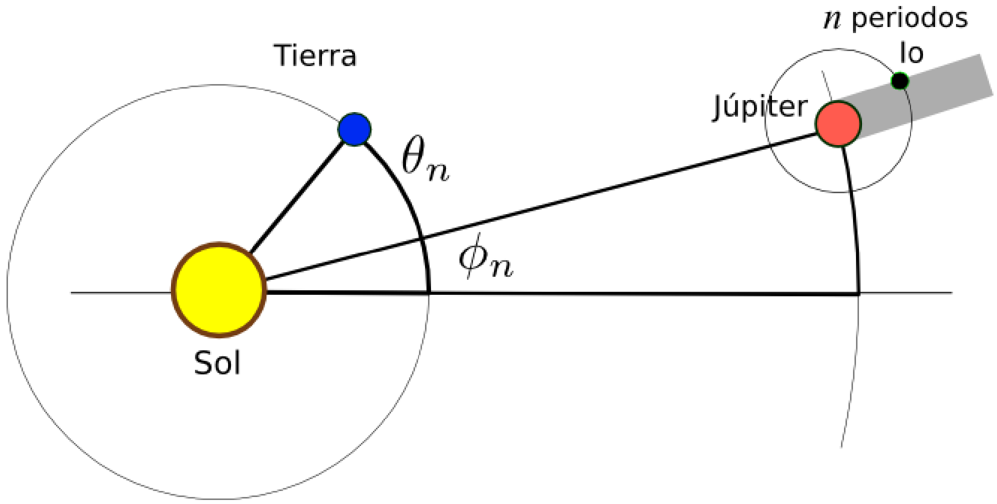
3.1	**Pregunta:** Determina el periodo orbital de Io alrededor de Júpiter. Usa los datos de la tabla al final del problema. Nota que tal tiempo es muchísimo menor que el periodo orbital de Júpiter alrededor del Sol.	2 puntos

3.2	**Pregunta:** Determinar el tiempo de duración del eclipse de la luna Io, es decir calcula el tiempo t_e que tarda Io en atravesar la sombra de Jupiter (suponga que la luna de Io es un punto sin dimensiones).	2 puntos

Hay dos posiciones relativas entre la Tierra y Júpiter que son importantes y se muestran en las siguientes figuras; una de ellas se llama *oposición* y es cuando la Tierra está en la posición más cercana a Júpiter y la otra se llama *conjunción* y es cuando la Tierra está en la posición más alejada de Júpiter.



Supongamos que inicialmente un astrónomo, estando la Tierra en *oposición*, observa la salida de Io de la sombra de Jupiter. Después de que Io ha completado n periodos el astrónomo vuelve a observar la salida de Io de la sombra de Júpiter. Durante este tiempo la Tierra y Júpiter han girado un ángulo θ_n y ϕ_n de su posición inicial (cuando estaban en *oposición*).

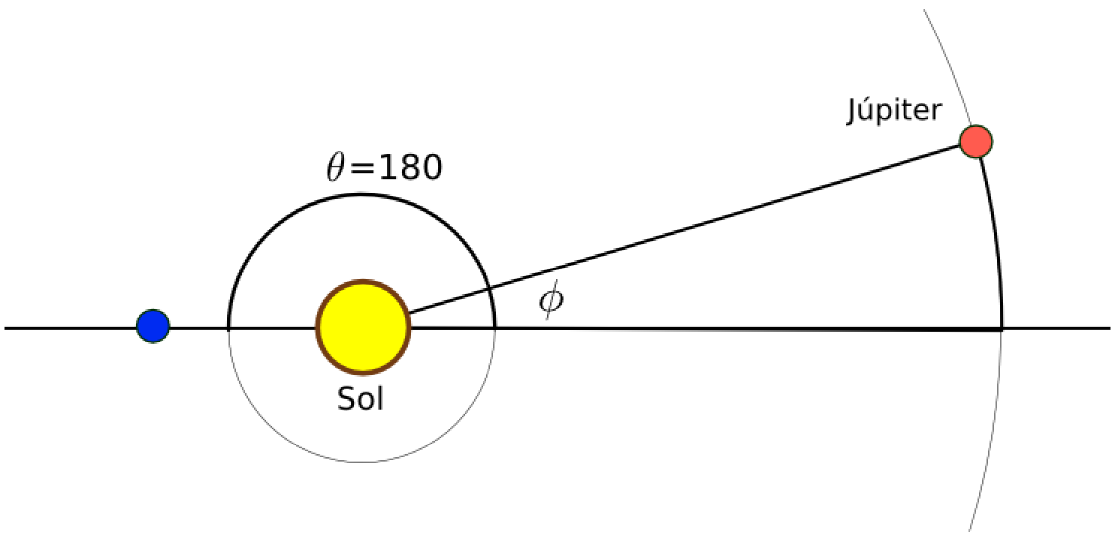


3.3	**Pregunta:** Determina el ángulo θ_n que ha girado la Tierra respecto de su posición inicial (*oposición*), así como el ángulo ϕ_n que ha girado Júpiter, cuando ha transcurrido un periodo completo de Io ($n = 1$) y cuando han transcurrido $n = 50$ periodos de Io.	2 puntos

3.4	**Pregunta:** Determina la distancia Tierra-Júpiter en unidades astronómica (UA) después de que ha transcurrido uno ($n = 1$) y cincuenta ($n = 50$) periodos de Io a partir de la *oposición* de la Tierra.	2 puntos

De tu resultado anterior notarás que hay un cambio notable en la distancia Tierra-Júpiter dependiendo de cuantos eclipses hayan ocurrido en Io. Con esta observación, y conociendo un periodo orbital de Io, un astrónomo en la Tierra puede anticipar el tiempo en que verá emerger al satélite Io de la sombra de Júpiter, medido a partir de una observación previa de la salida de Io. Sin embargo, al realizar las observaciones (tal como lo hizo Roemer en 1676) es un hecho experimental que hay un tiempo de retraso Δt en la salida de Io, con respecto al esperado. La explicación es que en ese intervalo de tiempo la Tierra se ha alejado de Júpiter, y dado que la luz viaja a una velocidad constante c, entonces la luz tiene que viajar una distancia más grande de Io a la Tierra y, por lo tanto, la aparición de Io se observa en la Tierra un tiempo más tarde de lo esperado. De esta manera, midiendo el tiempo de retraso Δt es posible determinar la velocidad de la luz.

En general el tiempo de retraso es muy pequeño si han transcurrido pocos periodos orbitales de Io, debido a que la distancia Tierra-Júpiter no varía mucho en este tiempo (ve tu respuesta de 3.2). Por lo tanto, es difícil de medir el tiempo Δt con unos cuantos periodos. Sin embargo, es posible medir el retraso de la observación *medio año* después, cuando la Tierra está en *conjunción* con respecto a la posición (*oposición*) original de Júpiter. Se ha medido con exactitud este retraso global y el resultado es, $\Delta t = 997\,\mathrm{s}$.



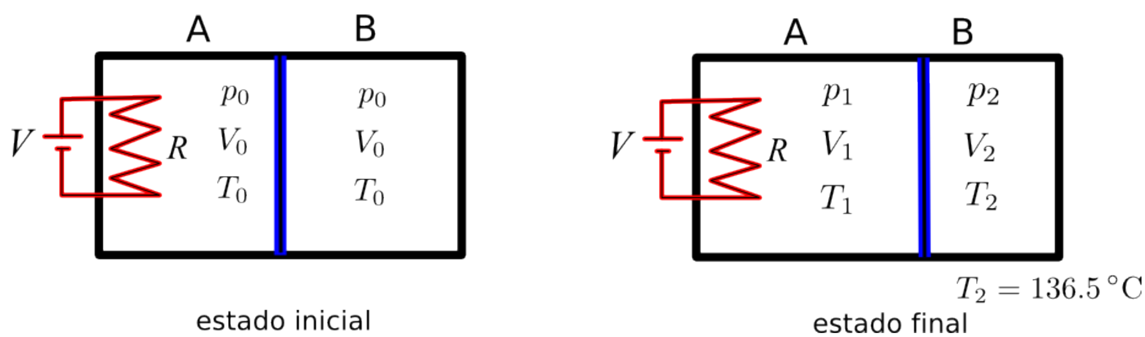
3.5	**Pregunta:** Con la medición observada del retraso en la aparición de Io, $\Delta t = 997\,\mathrm{s}$, determina la velocidad de la luz.	2 puntos

DATOS

radio orbital de la Tierra	$R_t = 1\,\mathrm{UA}$
radio orbital de Júpiter	$R_j = 5.203\,\mathrm{UA}$
radio Io-Jupiter	$R_{io} = 4.2 \times 10^8\,\mathrm{m}$
radio ecuatorial de Júpiter	$r_j = 71398\,\mathrm{km}$
unidad astronómica	$1\,\mathrm{UA} = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
masa Júpiter	$M_J = 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$
periodo de Júpiter alrededor del Sol	11.86 años
constante gravitacional	$G = 6.73 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$

XXV OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Oaxaca 9-13 de noviembre de 2014
Prueba teórica

Problema 1 Transferencia de calor (10 puntos)



Un contenedor cilíndrico, fabricado de un material aislante al calor, y de volumen total $V = 44.8\,\mathrm{lt}$ está dividido en dos compartimentos (A y B de la figura) mediante un pistón, también perfectamente aislante al calor, que puede desplazarse sin fricción. Cada compartimento tiene un mol de Helio en estado gaseoso. Inicialmente, los dos compartimentos tienen el mismo volumen V_0 (dividen a la mitad el contenedor cilíndrico) y están a la misma temperatura $T_0 = 0°$ C.

Con una resistencia eléctrica colocada en el compartimento A circula una corriente que genera calor lentamente por efecto Joule y cambia el estado termodinámico del sistema, es decir, el gas en los diferentes compartimientos cambian sus presiones, volúmenes y temperaturas. En particular, se encuentra que después de un tiempo t el gas en el compartimiento B ha alcanzado una temperatura de $T_2 = 136.5\,^\circ\mathrm{C}$.

El propósito de este problema es calcular ese tiempo t en el que la resistencia eléctrica confiere calor al sistema, sabiendo que dicha resistencia tiene el valor $R = 242\,\Omega$ y que está conectada a una fuente de voltaje de 220 V.

Los siguientes pasos pueden ser de utilidad en dicho cálculo.

Denotemos los valores finales en las variables del gas en cada compartimento de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} \text{valores finales:} \\ \text{compartimento A:} \quad (p_1, V_1, T_1) \qquad\qquad \text{compartimento B:} \quad (p_2, V_2, T_2) \end{array} \tag{1}$$

donde, como ya se mencionó, $T_2 = 136.5\,^\circ\mathrm{C}$.

Recuerda que en un gas ideal hay cuatro procesos básicos con las siguientes propiedades:

proceso	propiedad	ecuación que satisface el proceso
isotérmico	T es constante	$pV =$ constante
isobárico	p es constante	$\dfrac{V}{T} =$ constante
isocórico	V es constante	$\dfrac{p}{T} =$ constante
adiabático	$Q = 0$, no hay flujo de calor	$TV^{\gamma-1} =$ constante

donde $\gamma = c_p/c_V$;
c_v y c_p es la capacidad calorífica molar a volumen constante y presión constante respectivamente.
Para el Helio en estado gaseoso: $c_v = \dfrac{3}{2}R$ y $c_p = \dfrac{5}{2}R$
La constante universal de los gases ideales es: $R = 8.31\ \text{J/Kmol}$;

1.1	**Pregunta:** Determina la presión y el volumen final del compartimento B (p_2, V_2)	3 puntos

Solución

Empleando la ecuación de gas ideal se obtiene la presión inicial en cada compartimiento.

conversión: $T_0 = 273.15\,\mathrm{K}$,

$$V = 44.8\,\mathrm{lt} \times \frac{10^3\,\mathrm{cm}^3}{1\,\mathrm{lt}} \times \frac{1\,\mathrm{m}^3}{100^3\,\mathrm{cm}^3} = 44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3,\ V_0 = V/2,\ n = 1\,\mathrm{mol}$$

(Calcular bien el volumen V_0 de cada compartimiento inicial, 0.25 puntos)

$$p_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = \frac{8.31\ \ \mathrm{J/Kmol} \times 273.15\,\mathrm{K}}{44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/2} = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \approx 1\,\mathrm{atm} \tag{2}$$

El compartimento B esta aislado térmicamente por lo que el proceso del gas es adiabático. Empleando la ecuación del proceso adiabático que se da en la tabla se puede calcula el volumen final

Para el Helio: $\gamma = 5/3, \qquad \Rightarrow \quad 1/\left(\gamma - 1\right) = 3/2$

$$T_2 V_2^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}, \tag{3}$$

Identificar la ecuación adiabática y escribirla bien 1.25 puntos

$$\Rightarrow \quad V_2 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3}{2} \left(\frac{273.15\,\mathrm{K}}{409.65\,\mathrm{K}}\right)^{3/2} = 12.20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 = 12.20\,\mathrm{lt} \tag{4}$$

Calcular V_2 correcto 0.5 puntos = 0.25 fórmula + 0.25 resultado correcto con unidades

La presión final p_2 se obtiene con la ecuación de gas ideal:

$$\frac{p_2 V_2}{T_2} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = nR, \tag{5}$$

Usar la ecuación de gas ideal en el problema 0.5 puntos

$$\Rightarrow \quad p_2 = p_0 \frac{T_2}{T_0} \frac{V_0}{V_2} = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \times \frac{409.65\,\mathrm{K}}{273.15\,\mathrm{K}} \times \frac{44.8 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3/2}{12.20 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 2.78 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{6}$$

Calcular p_2 correcto 0.4 puntos = 0.2 fórmula + 0.2 resultado correcto con unidades

1.2	**Pregunta:** Determina la presión, volumen y temperatura finales del compartimento A (p_1, V_1, T_1)	2 puntos

Solución

$$V_1 = V - V_2 = 44.8\,\mathrm{lt} - 11.92\,\mathrm{lt} = 32.88\,\mathrm{lt} = 32.88 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}^3 \tag{7}$$

V_1correcto 0.25 puntos = 0.10 fórmula + 0.15 resultado correcto con unidades.
La presión en ambos compartimentos es la misma:

$$p_1 = p_2 = 2.78 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \tag{8}$$

Establecer que la presión es la misma en ambos lados, igual a la pregunta 1.1, 1.0 punto.
La temperatura se calcula con la ecuación del gas ideal:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = nR, \tag{9}$$

Usar ecuación de estado de gas ideal, 0.25 puntos

$$\Rightarrow \quad T_1 = T_0 \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = 273.15\,\mathrm{K} \times \frac{2.78 \times 10^5\,\mathrm{Pa}}{1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa}} \frac{32.88\,\mathrm{lt}}{44.8\,\mathrm{lt}/2} = 1103.59\,\mathrm{K} = 830.44\,^\circ\mathrm{C} \tag{10}$$

Calcular T_1 correcta 0.5 puntos = 0.25 fórmula + 0.25 resultado correcto con unidades
Notar que el tenemos información del tipo de proceso que se realizo en el compartimento A; sin embargo se puede calcular el valor de las variables del estado final.

1.3	**Pregunta:** Determina el cambio de energía en ambos compartimentos.	2 puntos

Solución
El cambio de energia en cada recipiente:

$$\begin{aligned} \Delta U_A = n c_v \Delta T_A = \frac{3}{2} R\,(T_1 - T_0) = \frac{3 \times 8.31\ \mathrm{J/Kmol}}{2}\,(1103.59\,\mathrm{K} - 273.15\,\mathrm{K}) = 10351.43\,\mathrm{J} \\ \Delta U_B = n c_v \Delta T_B = \frac{3}{2} R\,(T_2 - T_0) = \frac{3 \times 8.31\ \mathrm{J/Kmol}}{2}\,(409.65\,\mathrm{K} - 273.15\,\mathrm{K}) = 1701.47\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{11}$$

Energía U_A, 1 punto = 0.5 fórmula + 0.5 resultado correcto con unidades
Energía U_B, 1 punto = 0.5 fórmula + 0.5 resultado correcto con unidades

1.4	**Pregunta:** Usando que la resistencia del compartimento A tiene el valor $R = 242\,\Omega$ y que está conectada a una fuente de voltaje de 220 V, determina el tiempo t necesario que le toma a la resistencia generar el calor necesario para realizar el proceso descrito. ¿Existe trabajo W_A y W_B entre los compartimientos, durante el proceso? Si sí, ¿Cuál es la relación entre dichos trabajos?	3 puntos

Solución

El compartimento B esta aislado por lo que $Q_B = 0$, por otra parte en la resistencia es un sistema externo que provee calor Q_R entonces por lo que la primera ley para cada compartimento es:

$$\text{A}: \qquad \Delta U_A = Q_A + W_A \qquad\qquad \text{B}: \qquad \Delta U_B = W_B \tag{12}$$

Sin embargo, todo el sistema A+B recibe Q_R de la resistencia, por lo tanto:

$$\Delta U_T = \Delta U_A + \Delta U_B = Q_R \tag{13}$$

Identificar que el cambio de la energía total es igual al calor de resistencia $\Delta U_T = Q_R$, 0.5 puntos

Como $Q_A = Q_R$, entonces se obtiene:

$$\Delta U_A + \Delta U_B = \cancel{Q_A} + W_A + W_B = \cancel{Q_R}, \qquad \Rightarrow \quad W_A = -W_B \tag{14}$$

Relación WA = -WB entre trabajos, 0.5 puntos

Por otra parte la potencia de la resistencia esta dada $P = VI$; pero la potencia de la resistencia es precisamente el calor generado por efecto Joule por unidad de tiempo $P = \dfrac{Q_R}{t}$, entonces:

$$P = VI = \frac{V^2}{R}, \qquad t = \frac{R}{V^2} Q_R = \frac{R}{V^2}\left(\Delta U_A + \Delta U_B\right) \tag{15}$$

Relación correcta de potencia $P = V^2/R$ o expresión equivalente con Ley de Ohm $V = IR$, 0.75 puntos

Expresión correcta del tiempo de la resistencia $t = Q/P$ o expresión equivalente, 0.75 puntos

Por lo que el tiempo que tarda la resistencia en realizar el proceso es:

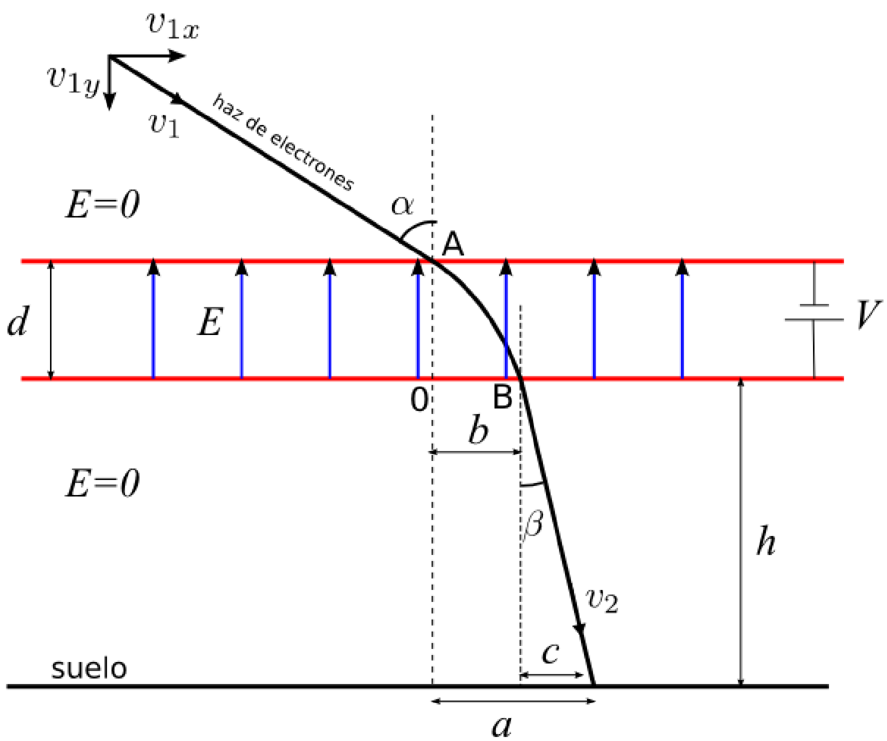
$$t = \frac{242\,\Omega}{(220\,\text{V})^2}\left(10351.43\,\text{J} + 1701.47\,\text{J}\right) = 60.26\,\text{s} \approx 1\,\text{min} \tag{16}$$

Cáculo del tiempo t, 0.5 puntos = 0.25 fórmula + 0.25 resultado correcto con unidades

Problema 2 Refracción de electrones (10 puntos)

Se tiene un haz de electrones que incide, a un ángulo α, sobre un par de placas paralelas que se encuentran a un potencial V (un condensador), ver figura. El haz incide en el punto A de la placa superior como se muestra en la figura y es desviado dentro de las placas, debido a que el campo eléctrico E entre las placas produce una fuerza sobre los electrones, hasta el punto B de la placa inferior. En ese punto el haz emerge fuera de las placas con un ángulo β. Considera que los electrones pueden cruzar las placas paralelas sin ser afectadas, es decir, sólo las desvía el campo eléctrico. Nota también que en la dirección horizontal no hay fuerzas sobre los electrones del haz. Desprecia cualquier efecto de la gravedad.

El problema general consiste en determinar la distancia horizontal a a la cual es proyectado el haz de electrones en el suelo, respecto de la linea vertical donde incide el haz en la placa superior.



2.1	**Pregunta** Suponiendo que la magnitud de la velocidad del haz incidente es v_1 y que el ángulo de incidencia es α, demuestra que si la magnitud de velocidad de haz desviado (refractado) es v_2 con ángulo β con respecto a la vertical, se satisface la siguiente relación: $$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_2}{v_1} \tag{17}$$	2 puntos

Solución:
(**1 punto**, identificar que las componentes de la velocidad, 0.5 c/u)
Comparando las componentes de la velocidad de los electrones incidentes y los electrones refractados:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{v_{1x}}{v_1}, \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{v_{2x}}{v_2} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{v_{1x}}{v_1}\frac{v_2}{v_{2x}} = \frac{v_2}{v_1} \tag{18}$$

(**0.8 punto**, identificar que la velocidad no cambia en la dirección horizontal)
En la dirección horizontal no hay fuerzas por lo que la velocidad en la dirección horizontal no cambia: $v_{1x} = v_{2x}$
(**0.2 punto**, resultado final)

La expresión (17) es semejante a la ley de Snell que describe la refracción de la luz cuando atraviesa la interfase entre dos medios de índice de refracción diferentes.

Considera que el haz de electrones incidente tiene una velocidad inicial $v_1 = 1.5 \times 10^7\,\mathrm{m/s}$ y que hace un ángulo $\alpha = 70°$ respecto de la normal de las placas. Considera también que las placas del condensador están separadas una distancia $d = 10\,\mathrm{cm}$ y están conectadas a una diferencia de potencial $V = 300\,\mathrm{V}$

2.2	**Pregunta** Encuentra el tiempo t_v que tarda un electrón perteneciente al haz, en atravesar las placas paralelas; es decir, el tiempo de ir del punto A al punto B.	3 puntos

Solución:
El campo eléctrico dentro de las placas es: $|E| = \dfrac{V}{d} = \dfrac{300\,\mathrm{V}}{0.1\,\mathrm{m}} = 3000\,\mathrm{V/m}$.
El campo eléctrico acelera a los electrones de acuerdo a la segunda ley de Newton:
0.75 puntos por formula correcta de aceleración, 0.25 valor numérico.
0.5 punto si se calcula solo campo eléctrico o segunda ley de Newton

$$F_e = eE = m_e a_e, \qquad \Rightarrow \quad a_e = \frac{eE}{m_e} = \frac{eV}{m_e d} \quad \text{(aceleración debida al campo)} \tag{19}$$

$$a_e = \frac{eV}{m_e d} = \frac{-1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{C}\times 300\,\mathrm{V}}{9.1\times 10^{-31}\ \mathrm{kg}\times 0.1\,\mathrm{m}} = 5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2} \tag{20}$$

Según la dirección del campo eléctrico en la figura, la fuerza eléctrica es negativa (hacia abajo) y la aceleración en la componente vertical es constante por lo que dentro de las placas la trayectoria del haz de electrones es una parábola (tiro parabólico).
(0.5 punto identificar tiro parabólico)
Las componentes de la velocidad son: $v_{1x} = v_1 \operatorname{sen}\alpha$ y $v_{1y} = -v_1\cos\alpha$
Ecuaciones del tiro parabolico: (0.5 punto ecuaciones de tiro parabólico)

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{1x}t \\ y(t) &= y_0 + v_{1y}t - \frac{1}{2}a_e t^2 \end{aligned}, \qquad \begin{aligned} v_x(t) &= v_{1x} = v_1\operatorname{sen}\alpha \\ v_y(t) &= v_{1y} - a_e t = -v_1\cos\alpha - a_e t \end{aligned} \tag{21}$$

Para analizar el tiro parabolico conviene ubicar el origen de coordenadas en el punto O de la figura, de tal manera que $x_0 = 0$, $y_0 = d$. Así, para hallar el tiempo que tarda el electrón en atravesar las placas t_v y el alcance b se tiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} b &= v_{1x}t_v \\ 0 &= d + v_{1y}t_v - \frac{1}{2}a_e t_v^2 \end{aligned} \tag{22}$$

El tiempo t_v se obtiene de la segunda ecuación:
0.75 punto resolver la ecuación para t_v , 0.25 por valor numérico correcto.

$$t_c = \frac{v_{1y}}{a_e} \pm \sqrt{\left(\frac{v_{1y}}{a_e}\right)^2 + \frac{2d}{a_e}} = \frac{v_{1y} \pm \sqrt{v_{1y}^2 + 2a_e d}}{a_e} = \frac{-v_1\cos\alpha \pm \sqrt{v_1^2\cos^2\alpha + 2a_e d}}{a_e} \tag{23}$$

Para que el tiempo sea positivo se elige el signo positivo de la raiz:

$$\begin{aligned} t_v &= \frac{-v_1\cos\alpha + \sqrt{v_1^2\cos^2\alpha + 2a_e d}}{a_e} \\ &= \frac{-\left(1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s}\right)\cos 70^\circ + \sqrt{\left(1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s}\right)^2\cos^2 70^\circ + 2\left(5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}\right)(0.1\,\mathrm{m})}}{5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}} \\ &= 1.20\times 10^{-8}\,\mathrm{s} \end{aligned} \tag{24}$$

2.3	**Pregunta** Calcula la distancia b que es desviado el haz de electrones dentro de las placas. Ver figura, $b = \overline{OB}$.	2 puntos

Solución

1 punto identificar que se trata del alcance horizontal de un tiro parabolico: $x = tv_{1x}$
0.75 punto formula correcta, 0.25 valor numérico correcto.

Conociendo el valor de t_v encontrado en el inciso anterior, se obtiene la distancia que se desvia el haz:

$$b = v_{1x}t_v = v_1 \operatorname{sen}\alpha\, t_v = \left(1.5 \times 10^7\,\mathrm{m/s}\right)(\operatorname{sen}70^\circ)\left(1.20 \times 10^{-8}\,\mathrm{s}\right) = 0.17\,\mathrm{m} = 17\,\mathrm{cm} \tag{25}$$

2.4	**Pregunta** Si la altura a la que se encuentra la placa inferior del condensador con respecto al piso es $h = 1\,\mathrm{m}$, determina la distancia total a que se desvía el haz hasta llegar al suelo (ver figura).	3 puntos

Solución:
El ángulo de desviación β se determina a partir de ley de Snell, ecuación (17); sin embargo, primero es necesario calcular la velocidad final del haz de electrones v_2 con que salen de las placas. Una manera sencilla se obtiene con la ecuación de la conservación de energía:
(1 punto conservación de energía para encontrar la razón v_2/v_1)

$$\text{conservación de energía:} \quad \frac{m}{2}v_2^2 = \frac{m}{2}v_1^2 + eV, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+\frac{2eV}{mv_1^2}} \tag{26}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{1+\frac{2eV}{mv_1^2}} = \sqrt{1+\frac{2\times 1.6\times 10^{-19}\ \mathrm{C}\times 300\,\mathrm{V}}{(9.1\times 10^{-31}\ \ \mathrm{kg})\,(1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s})^2}} = 1.21, \qquad v_2 = 1.81\times 10^7\,\mathrm{m/s} \tag{27}$$

(1 punto usar ley de Snell del inciso 2.1)
Sustituyendo en la ley de Snell, se obtiene:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \sqrt{1+\frac{2eV}{mv_1^2}} = 1.21, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \operatorname{sen}\beta &= \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1.21} \\ \beta &= \arcsin\left[\frac{\operatorname{sen}70^\circ}{1.21}\right] = \arcsin\,[0.78] \\ \beta &= 50.95^\circ \end{aligned} \tag{28}$$

Otra manera de calcular la velocidad v_2, así como el ángulo β es a partir de las ecuaciones del tiro parabolico (21), de la siguiente manera. Al llegar al punto B ha transcurrido el tiempo t_v, de donde la componente vertical de la velocidad en el punto B es:
(0.75 punto componente vertical de la velocidad en el punto B)

$$\begin{aligned} v_{2y}(B) &= -v_1\cos\alpha - a_e t_v \\ &= -\left(1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s}\right)(\cos 70^\circ) - \left(5.27\times 10^{14}\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(1.20\times 10^{-8}\,\mathrm{s}\right) \\ &= -1.15\times 10^7\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{29}$$

(0.75 punto velocidad v_2 en el punto B)
como la componente horizontal de la velocidad no cambia, entonces v_2 se calcula como:

$$v_2 = \sqrt{v_{1x}^2 + (v_{2y}(B))^2} = \sqrt{(1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s}\times \operatorname{sen}70^\circ)^2 + (-1.15\times 10^7\,\mathrm{m/s})^2} = 1.82\times 10^7\,\mathrm{m/s} \tag{30}$$

(0.5 punto calcular el ángulo β)
resultado que coincide con (27), el ángulo β se obtiene de la siguiente manera:

$$\tan\beta = \frac{v_{1x}}{v_{2y}} = \frac{1.5\times 10^7\,\mathrm{m/s}\times \operatorname{sen}70^\circ}{-1.15\times 10^7\,\mathrm{m/s}} = -1.22, \qquad \beta = \arctan(-1.22) = 50.79^\circ \tag{31}$$

(0.5 punto identificar $c = h\tan\beta$)
con esto se obtiene la siguiente distancia:

$$c = h\ \tan\beta = 1\,\mathrm{m}\times\tan(50.95^\circ) = 1.23\,\mathrm{m} \tag{32}$$

(0.5 punto resultado final)
finalmente la ditancia total que se pide es:

$$a = b + c = 0.17\,\mathrm{m} + 1.23\,\mathrm{m} = 1.4\,\mathrm{m} \tag{33}$$

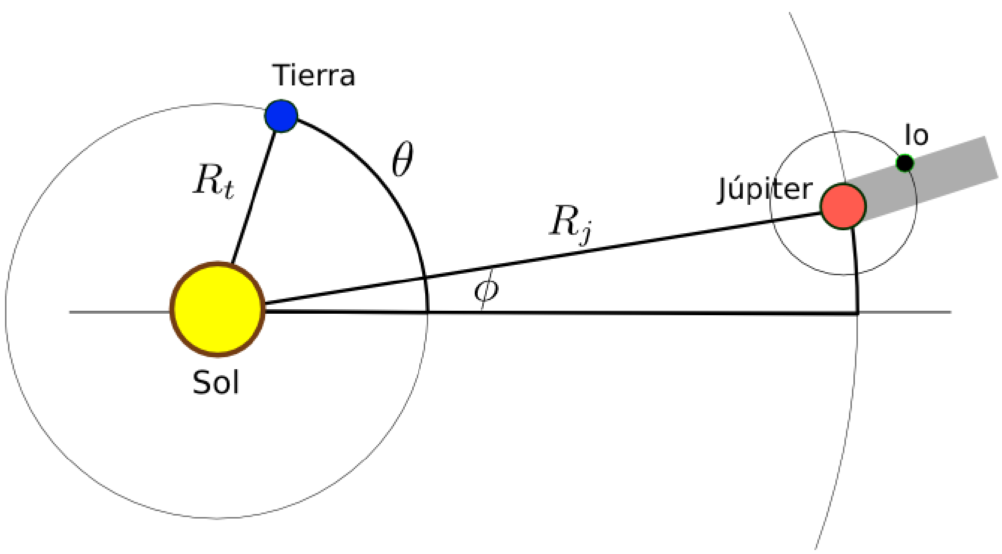
DATOS

carga del electrón	$e = -1.6 \times 10^{-19}$ C
masa del electrón	$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kg

Problema 3 Velocidad de la Luz, experimento de Romer (10 puntos)

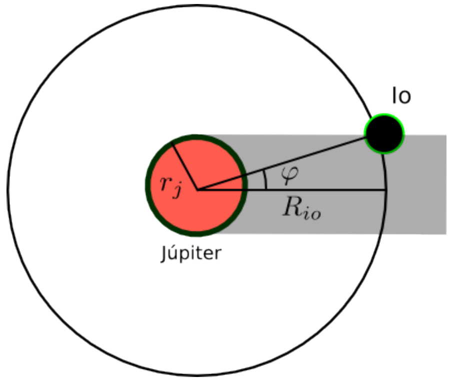
En el año 1676 el astrónomo danés Ole Roemer realizó la primera medición de la velocidad de la luz. En las observaciones hechas por Romer de la luna Io de Júpiter había notado que la duración de los eclipses del satélite se hacían más cortos conforme la Tierra se acercaba a Júpiter y por el contrario se hacían más largos conforme se alejaban. Estas discrepancias, conjeturó Romer, se podían explicar suponiendo que la velocidad de la luz era finita y no infinita como se creía entonces. Es decir, la discrepancia se debía al tiempo adicional que le toma a la luz viajar entre la Tierra y Júpiter. Este problema consiste en determinar la velocidad de la luz de acuerdo al razonamiento de Roemer.

En la figura se observa la configuración en un momento dado del Sol, la Tierra, Júpiter y su satélite Io. En todo el problema supondremos que el Sol está fijo en un punto, mientras que la Tierra y Júpiter giran alrededor del Sol en órbitas circulares (en general son órbitas elípticas, pero por simplicidad suponemos que son circunferencias) cuyos radios son R_T y R_J, respectivamente. En la figura se muestra también la sombra que proyecta Júpiter sobre una parte de la órbita de Io, lo que provoca el eclipse de Io.



De la figura también se puede ver que durante la mitad de la trayectoria de la Tierra, es decir durante medio año, un observador en la Tierra sólo puede ver cuando Io emerge de la sombra proyectada de Júpiter, ya que el mismo Júpiter impide ver cuando entra en la sombra de Júpiter. Lo contrario sucede la siguiente mitad de la trayectoria, el siguiente medio año, cuando solo se puede observar la entrada en la sombra de Júpiter y no su salida de ella.

Primero analicemos el sistema de Júpiter y su luna Io. Para ello se ilustra este sistema en la siguiente figura y se plantean las siguientes preguntas.



3.1	**Pregunta:** Determina el periodo orbital de Io alrededor de Júpiter. Usa los datos de la tabla al final del problema. Nota que tal tiempo es muchísimo menor que el periodo orbital de Júpiter alrededor del Sol.	2 puntos

Solución:
1 punto fuerza gravitacional y centripeta, 0.75 formula correcta del periodo y 0.25 valor numérico correcto
Usando fuerza gravitacional y fuerza centrípeta se obtiene la velocidad órbita de la luna Io y por lo tanto su periodo orbital.

$$m_{io}\frac{v^2}{R_{io}} = G\frac{M_J m_{io}}{R_{io}^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{GM_J}{R_{io}}} = 17448.6\,\mathrm{m/s} \tag{34}$$

$$\boxed{T_{io} = \frac{2\pi R_{io}}{v} = 151241.01\,\mathrm{s} = 42.01\,\mathrm{h} = 1.750\,\mathrm{dias}} \tag{35}$$

A medida que Júpiter se mueve su sombra proyectada en una porción de la órbita de su luna Io va cambiando de orientación, tal como se observa en la figura.

3.2	**Pregunta:** Determinar el tiempo de duración del eclipse de la luna Io, es decir calcula el tiempo t_e que tarda Io en atravesar la sombra de Jupiter (suponga que la luna de Io es un punto sin dimensiones).	2 puntos

Solución

1.75 llegar a formula correcta del tiempo, 0.25 valor numérico

Como la anchura de la sombra es igual al diámetro de Júpiter, el ángulo φ que subtiende medio arco del eclipse se puede calcular como:

$$\tan\varphi = \frac{r_J}{R_{io}} = \frac{71398 \times 10^3\,\mathrm{m}}{4.2 \times 10^8\,\mathrm{m}}, \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arctan\left[\frac{r_J}{R_{io}}\right] = 0.168\,\mathrm{rad} \tag{36}$$

Por una regla de tres se obtiene el tiempo de duración del eclipse de Io: (**1 punto**)

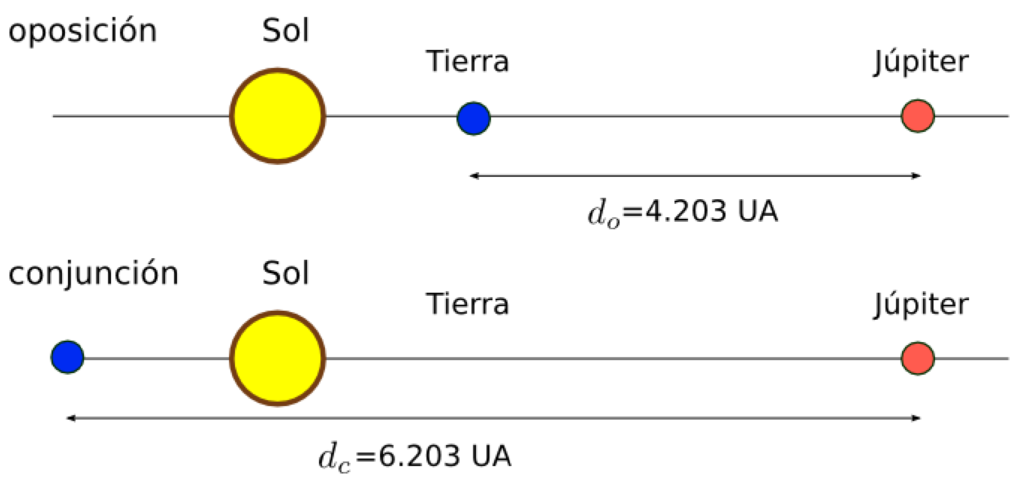
$$\frac{t_e}{T_{io}} = \frac{2\varphi}{2\pi} \qquad t_e = \frac{2\varphi}{2\pi}T_{io} = \frac{\varphi}{\pi} \times 151241\,\mathrm{s} = 8087.75\,\mathrm{s} = 134.79\,\mathrm{min} = 2.25\,\mathrm{hrs} \tag{37}$$

Otra manera de calcular el tiempo que tarda Io en atravesar la sombra de Júpiter sería a partir de la velocidad de Io, ecuación (34), de la siguiente manera: (**2 punto**)

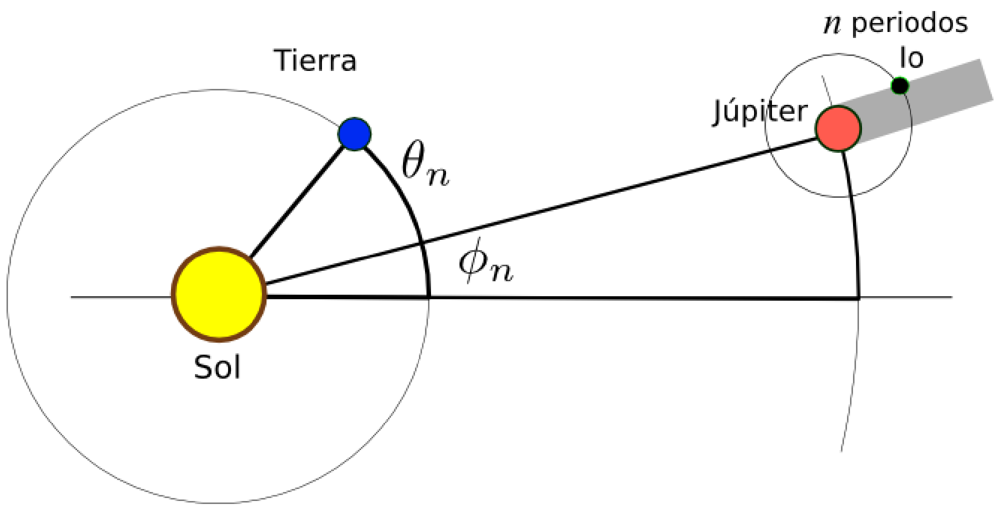
$$t_e = \frac{2r_j}{v} = \frac{2 \times 71398 \times 10^3\,\mathrm{m}}{17448.6\,\mathrm{m/s}} = 8183.80\,\mathrm{s} = 136.40\,\mathrm{min} = 2.27\,\mathrm{hrs} \tag{38}$$

(esto es valido porque $r_j \ll R_{io}$) cuyo resultado solo varía en el orden de minutos, respecto del anterior.

Hay dos posiciones relativas entre la Tierra y Júpiter que son importantes y se muestran en las siguientes figuras; una de ellas se llama *oposición* y es cuando la Tierra está en la posición más cercana a Júpiter y la otra se llama *conjunción* y es cuando la Tierra está en la posición más alejada de Júpiter.



Supongamos que inicialmente un astrónomo, estando la Tierra en *oposición*, observa la salida de Io de la sombra de Jupiter. Después de que Io ha completado n periodos el astrónomo vuelve a observar la salida de Io de la sombra de Júpiter. Durante este tiempo la Tierra y Júpiter han girado un ángulo θ_n y ϕ_n de su posición inicial (cuando estaban en *oposición*).



3.3	**Pregunta:** Determina el ángulo θ_n que ha girado la Tierra respecto de su posición inicial (*oposición*), así como el ángulo ϕ_n que ha girado Júpiter, cuando ha transcurrido un periodo completo de Io ($n = 1$) y cuando han transcurrido $n = 50$ periodos de Io.	2 puntos

Solución
Hay que hallar la velocidad angular de la Tierra y multiplicar por el numero de periodos de Io.
0.5 punto, frecuencia angular del movimiento circular; 0.5 punto, ángulo que recorre (0.25 c/u)

$$\omega_T = \frac{2\pi}{365\,\text{dias}} = 0.017\,\text{dias}^{-1}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \theta_n &= \omega_T \times nT_{io} = 0.017\,\text{dias}^{-1} \times n\,1.750\,\text{dias} \\ &= n\,0.03\,\text{rad} = n\,1.72^\circ \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} n &= 1 \quad \theta_1 = 0.03\,\text{rad} = 1.72^\circ \\ n &= 50 \quad \theta_{50} = 1.5\,\text{rad} = 86^\circ \end{aligned} \tag{40}$$

Lo mismo para Júpiter:
0.5 punto, frecuencia angular del movimiento circular; 0.5 punto, ángulo que recorre (0.25 c/u)

$$\begin{aligned} \omega_J &= \frac{2\pi}{11.86 \times 365\,\text{dias}} = 0.0015\,\text{dias}^{-1}, \\ \Rightarrow \quad \phi_n &= \omega_J\, nT_{io} = 0.0015\,\text{dias}^{-1} \times n\,1.750\,\text{dias} = n\,0.0025\,\text{rad} = n\,0.14^\circ \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} n &= 1 \quad \phi_1 = 0.0025\,\text{rad} = 0.14^\circ \\ n &= 50 \quad \theta_{50} = 0.125\,\text{rad} = 7.16^\circ \end{aligned} \tag{42}$$

3.4	**Pregunta:** Determina la distancia Tierra-Júpiter en unidades astronómica (UA) después de que ha transcurrido uno ($n = 1$) y cincuenta ($n = 50$) periodos de Io a partir de la *oposición* de la Tierra.	2 puntos

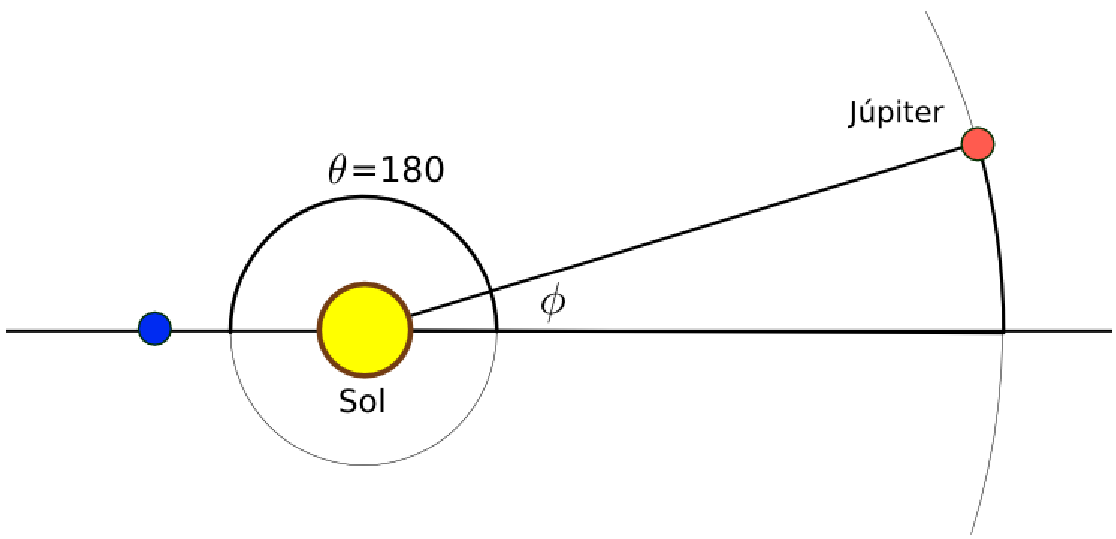
Solución:
Si θ_1 y ϕ_1 es el ángulo que ha girado la Tierra y Júpiter, respectivamente, durante un periodo de Io. Entonces por ley de cosenos se puede encontrar la distancia Tierra-Júpiter
1.5 punto formula correcta; 0.25 punto por evalucuación correcta de cada una de las distancias)

$$\begin{aligned} d_n &= \sqrt{R_t^2 + R_j^2 - 2R_tR_j\cos\left(\theta_n - \phi_n\right)} \\ \\ d_1 &= \sqrt{(1\,\text{UA})^2 + (5.203\,\text{UA})^2 - 2\,(1\,\text{UA})\,(5.203\,\text{UA})\cos\left(1.72^\circ - 0.14^\circ\right)} = 4.20347\,\text{UA} \\ d_{50} &= \sqrt{(1\,\text{UA})^2 + (5.203\,\text{UA})^2 - 2\,(1\,\text{UA})\,(5.203\,\text{UA})\cos\left(86^\circ - 7.16^\circ\right)} = 5.10462\,\text{UA} \end{aligned} \tag{43}$$

En un periodo de Io la distancia permanece casi igual respecto de la oposición de la Tierra ($d = 4.203\,\text{UA}$), después de 50 periodos ya se nota la diferencia en este caso aproximadamente 1 UA.

De tu resultado anterior notarás que hay un cambio notable en la distancia Tierra-Júpiter dependiendo de cuantos eclipses hayan ocurrido en Io. Con esta observación, y conociendo un periodo orbital de Io, un astrónomo en la Tierra puede anticipar el tiempo en que verá emerger al satélite Io de la sombra de Júpiter, medido a partir de una observación previa de la salida de Io. Sin embargo, al realizar las observaciones (tal como lo hizo Roemer en 1676) es un hecho experimental que hay un tiempo de retraso Δt en la salida de Io, con respecto al esperado. La explicación es que en ese intervalo de tiempo la Tierra se ha alejado de Júpiter, y dado que la luz viaja a una velocidad constante c, entonces la luz tiene que viajar una distancia más grande de Io a la Tierra y, por lo tanto, la aparición de Io se observa en la Tierra un tiempo más tarde de lo esperado. De esta manera, midiendo el tiempo de retraso Δt es posible determinar la velocidad de la luz.

En general el tiempo de retraso es muy pequeño si han transcurrido pocos periodos orbitales de Io, debido a que la distancia Tierra-Júpiter no varía mucho en este tiempo (ve tu respuesta de 3.2). Por lo tanto, es difícil de medir el tiempo Δt con unos cuantos periodos. Sin embargo, es posible medir el retraso de la observación *medio año* después, cuando la Tierra está en *conjunción* con respecto a la posición (*oposición*) original de Júpiter. Se ha medido con exactitud este retraso global y el resultado es, $\Delta t = 997\,\mathrm{s}$.



3.5	**Pregunta:** Con la medición observada del retraso en la aparición de Io, $\Delta t = 997\,\mathrm{s}$, determina la velocidad de la luz.	2 puntos

Solución:
Primero determinamos el ángulo ϕ que ha girado Júpiter cuando la Tierra ha girado 180° o π radianes:
(0.25 punto, ángulo ϕ)

$$\frac{1/2\,\text{año}}{11.86\,\text{años}} = \frac{\phi}{360} \qquad \Rightarrow \quad \phi = \frac{360^\circ}{2\times 11.86} = 15.18^\circ \tag{44}$$

Entonces la distancia Tierra-Jupiter se obtiene con ley de cosenos:
(0.25 punto, ley de los cosenos)

$$\begin{aligned} d_c &= \sqrt{R_t^2 + R_j^2 - 2R_tR_j\cos\left(180^\circ - \phi\right)} \\ &= \sqrt{\left(1\,\text{UA}\right)^2 + \left(5.203\,\text{UA}\right)^2 - 2\left(1\,\text{UA}\right)\left(5.203\,\text{UA}\right)\cos\left(180^\circ - 15.18^\circ\right)} \\ &= 6.171\,\text{UA} \end{aligned} \tag{45}$$

La velocidad de la luz es la diferencia de distancias entre el tiempo de retraso:
(1.5 punto, velocidad de la luz)

$$c = \frac{6.171\,\text{UA} - 4.203\,\text{UA}}{997\,\text{s}} = \frac{1.968\,\text{UA}}{997\,\text{s}} = \frac{1.968\times 1.496\times 10^{11}\,\text{m}}{997\,\text{s}} = 2.953\times 10^{8}\,\text{m/s} \tag{46}$$

DATOS

radio orbital de la Tierra	$R_t = 1\,\mathrm{UA}$
radio orbital de Júpiter	$R_j = 5.203\,\mathrm{UA}$
radio Io-Jupiter	$R_{io} = 4.2 \times 10^8\,\mathrm{m}$
radio ecuatorial de Júpiter	$r_j = 71398\,\mathrm{km}$
unidad astronómica	$1\,\mathrm{UA} = 1.496 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$
masa Júpiter	$M_J = 1.9 \times 10^{27}\,\mathrm{kg}$
periodo de Júpiter alrededor del Sol	11.86 años
constante gravitacional	$G = 6.67 \times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Culiacán, Sinaloa
8-12 Noviembre, 2015
EXAMEN EXPERIMENTAL

Luz de un LED y su efecto en una fotorresistencia

Un **LED** (Diodo Emisor de Luz o Light Emitting Diode, por sus siglas en inglés) es un dispositivo electrónico que emite luz debido al movimiento de los electrones en un material semiconductor. Podemos decir, de manera sencilla, que la intensidad de la luz del LED depende de la corriente eléctrica que fluye por él.

Una **fotorresistencia (FR)** también es un material semiconductor pero con una resistencia muy alta a la corriente eléctrica, tal que al absorber luz reduce drásticamente su resistencia. Podemos decir, también de manera sencilla, que la resistencia de la FR depende de la intensidad de la luz que recibe.

En este problema exploraremos la relación entre (a) la corriente que fluye por un LED, cambiando la intensidad de la luz que emite, y (b) la resistencia que adquiere una FR debida a la luz del LED.

En el equipo experimental que se le entregó encontrará dos "tablitas"marcadas con (A) y (B). La tablita (B) contiene un circuito electrónico, que se le explicará más abajo, con un LED y una FR, cubiertos por un tubito negro de plástico (llamado *thermofit*). El tubito es necesario para que la FR sólo absorba la luz del LED y no la del medio ambiente. Si lo desea puede quitar con cuidado el tubito para que observe el LED y la FR. **Una vez que los observe, coloque con cuidado el tubito de tal manera que tape tanto al LED como a la FR.** Vea la Figura 1 si no desea quitar el tubito.

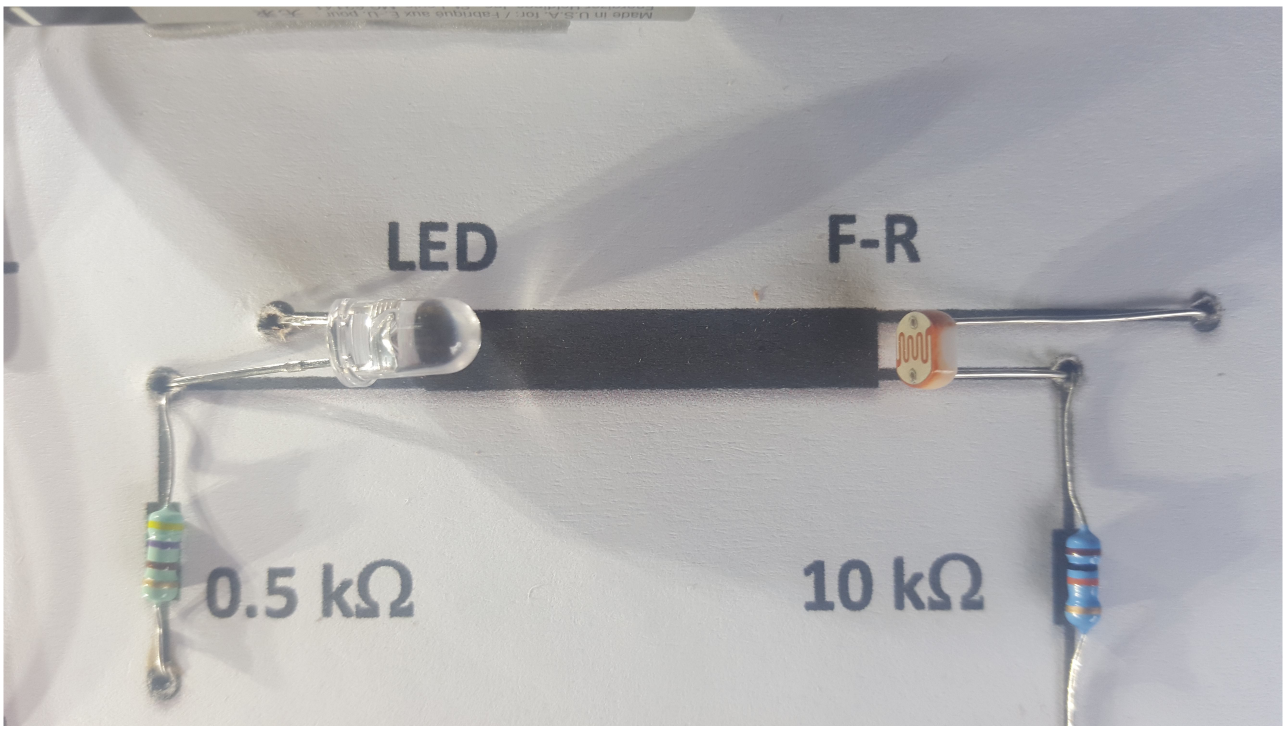


Figura 1: Se muestra el LED y la FR sin el tubito negro

El problema consiste de tres partes. En la primera estudiará los diferentes circuitos que puede formar con las tres resistencias de la tablita (A) y en la segunda y tercera partes, usará dichos circuitos para medir y determinar la relación entre la corriente que pasa por el LED y la resistencia del FR, debida a la luz del LED.

Material:

- Un multímetro con cables (rojo y negro) con puntas metálicas (cubiertas) en uno de sus extremos. Vea la Figura 2 para la conexión de los cables al multímetro.
- Una tablita, marcada (A), con 3 resistencias. Cada extremo de las resistencias está conectado a una terminal de cobre para su fácil conexión y medición. Figura 3. **Puede doblar ligeramente las terminales hacia abajo para su mejor uso, como en la figura.**
- Una tablita, marcada (B), con un circuito electrónico, una batería de aproximadamente 9 Volts (V), un LED, una FR y dos resistencias. Figura 4.
- 8 cables con "caimanes".
- Regla, escuadras, papel milimétrico, lápiz, goma, hojas en blanco.

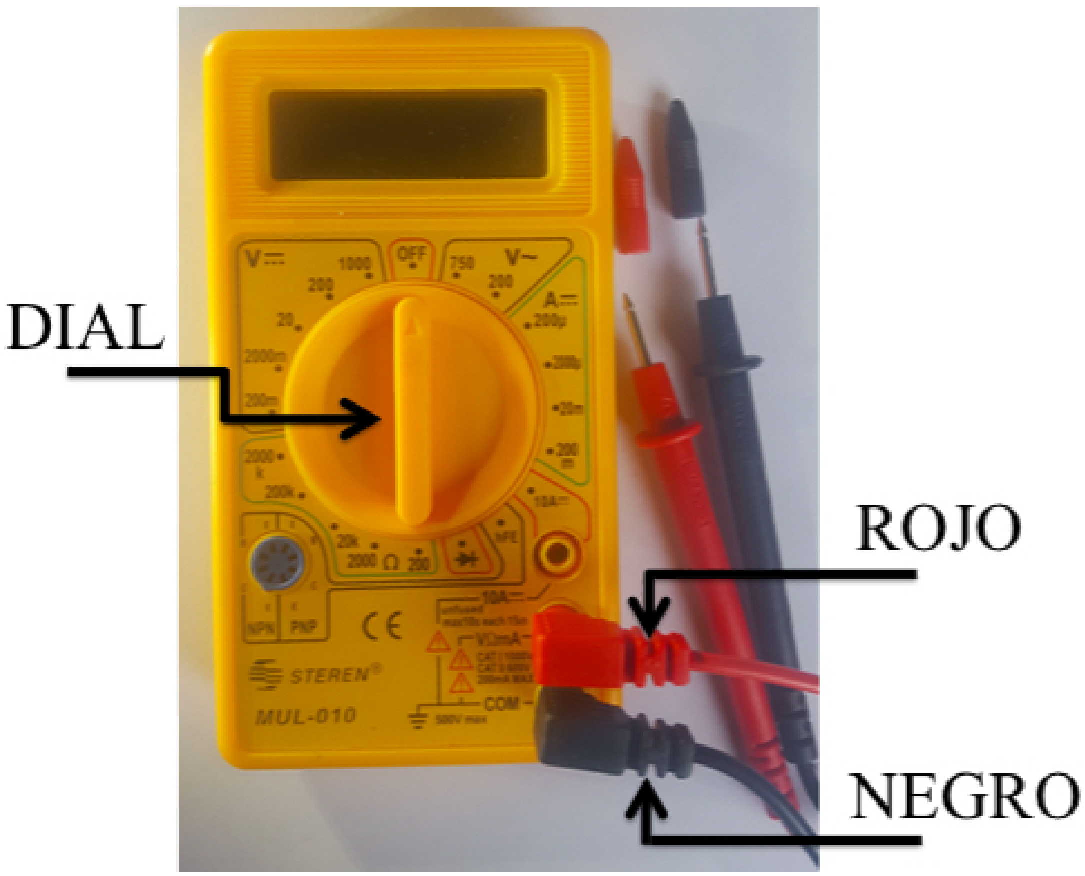


Figura 2: Multímetro. Conecte el cable negro en el contacto más bajo y el cable rojo en el siguiente hacia arriba. El dial o perilla le permite usar el multímetro como *voltímetro* (medidor de voltaje V); *óhmetro* (medidor de resistencia R); o *amperímetro* (medidor de corriente I).

Para este examen, el multímetro sólo se usará como voltímetro y como óhmetro. No intente usarlo como amperímetro pues no hay garantía de que funcione correctamente como tal, debido a que el fusible del multímetro puede estar dañado.

1. Circuitos con resistencias. (6 puntos)

En esta parte el multímetro lo usará para medir resistencias sólamente. Debido a que todas las resistencias que medirá estarán entre 0 y 50 kΩ (kilo-Ohms), coloque el dial en la zona de resistencia (Ω) ya sea en 20k o en 200k. Vea la Figura 3. Para medir la resistencia conecte el cable rojo del multímetro en un extremo de la resistencia y el cable negro en el otro. Use cables con caimanes para hacer un buen contacto eléctrico. Si el multímetro marca "1" quiere decir que está fuera de escala y que debe mover el dial a la siguiente escala superior.

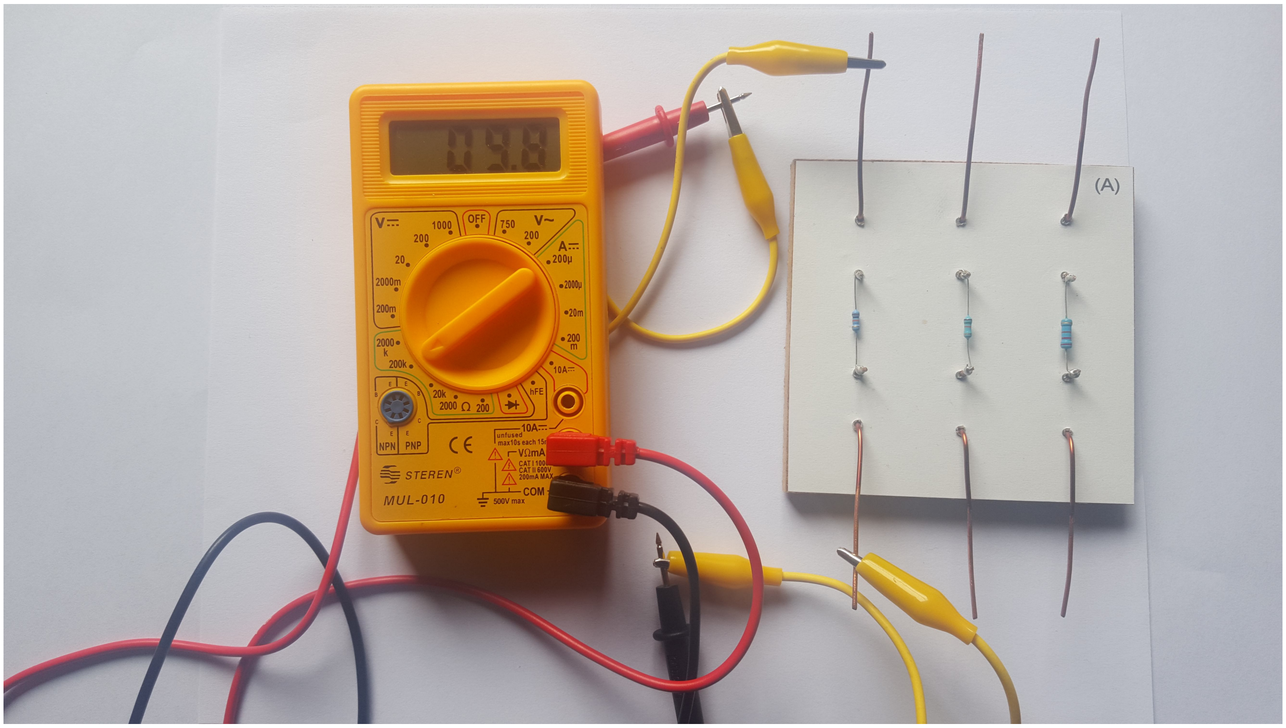


Figura 3: Tablita A con tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, y con sus terminales para fácil conexión.

Tareas

1.1 Mida la resistencia de las 3 resistencias de la tablita (A) conectando los caimanes a las puntas de cobre, vea Figura 3. Llámelas R_1, R_2 y R_3, y escríbalas. Nota: aunque usted conozca el código de colores de las resistencias, mídalas. (1 punto).

1.2 Construya cuantos circuitos de resistencias pueda usando las tres resistencias R_1, R_2 y R_3, conectándolas con los cables con caimanes y mida la resistencia total R_C obtenida en cada circuito. Asegúrese de incluir el circuito con menor resistencia y el circuito con mayor resistencia. Haga un dibujo o diagrama por cada circuito, indicando las conexiones entre las resistencias R_1, R_2 y R_3. Enumere sus circuitos y reporte la resistencia R_C de cada circuito usando la Tabla I. (5 puntos).

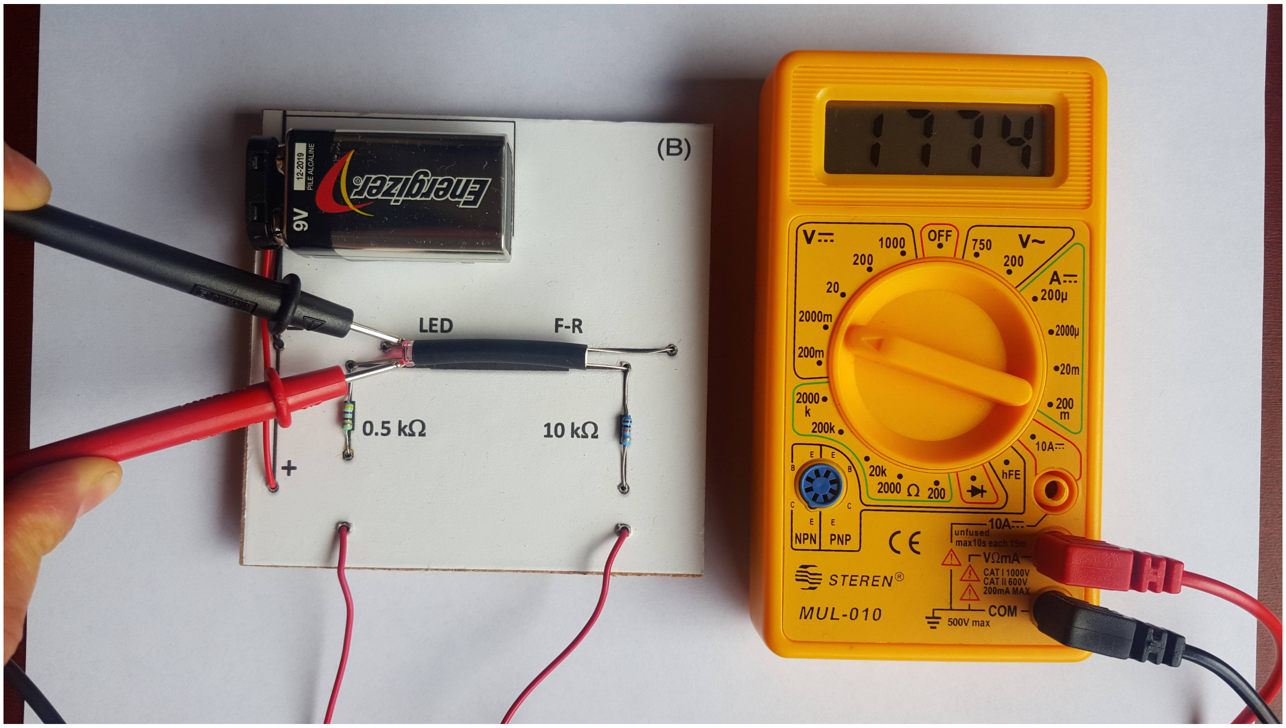


Figura 4: Medición de voltaje (V) en los dispositivos de la tablita B. Con el multímetro en 20 o 2000m en V, haga contacto entre la punta roja y un extremo (o “pata”) del dispositivo y entre la punta negra y el otro extremo del dispositivo. **¡La batería debe estar conectada!**

2. Voltajes en el LED y la FR, como función de la resistencia en el LED. (7 puntos)

En esta parte usará tanto la tablita (A) como la (B) y realizará sólo mediciones de voltaje. Debido a que los voltajes que medirá son todos menores a 10 V, coloqué el dial del multímetro en la zona de voltaje (V) en el valor 20 o 2000m, vea la Figura 4. Note que 2000m quiere decir que el máximo es 2000 milivolts, es decir 2 V; note también que en este caso la lectura del multímetro también estará en milivolts.

Para medir el voltaje (V) en un dispositivo electrónico, coloque la punta roja en un extremo del dispositivo y la negra en el otro, vea la Figura 4. Si el valor aparece negativo, simplemente invierta la colocación de las puntas rojas y negras. Si lo desea, puede usar caimanes en las puntas, sin embargo, no es necesario usarlas si hace un buen contacto entre las puntas y lo que está midiendo.

Observe con detalle las conexiones en la tablita (B) y compárelas con las del diagrama de la Figura 5. Los cables negros son de corriente negativa y los rojos de positiva. Note que, aunque usamos una sóla batería, en realidad son dos circuitos independientes, uno para el LED y otro para la FR. Es decir, usamos la misma batería como fuente de alimentación eléctrica para los dos circuitos. Note también que el circuito de la FR ya está “cerrado”, mientras que el del LED está “abierto”, marcado con “?” en la Figura 5.

A partir de este momento, conecte la batería al broche.

Ahora, junte los extremos de los cables delgados rojos que salen de la tablita (B) (identifíquelos en el diagrama) y observe que el LED se enciende emitiendo luz roja. Como observará más adelante, la intensidad de la luz depende de la corriente que pasa por el LED.

Importante: Las resistencias, la de 0.5 kΩ conectada al LED y la de 10 kΩ conectada a la FR, son para "protección" de los circuitos, sin embargo, deberá tomarlas en cuenta en su análisis de la parte 3.

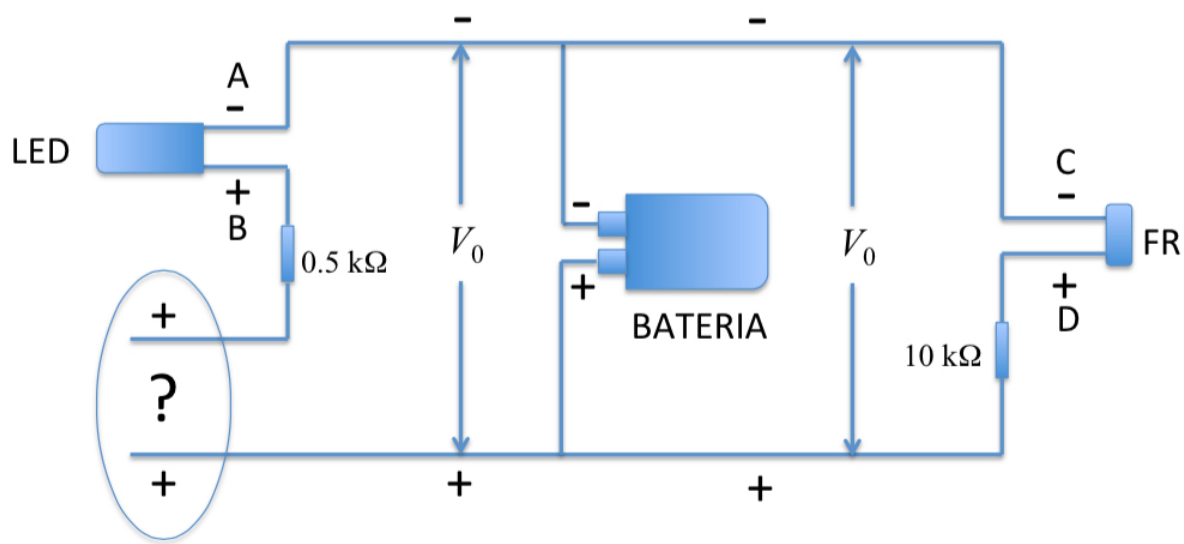


Figura 5: Diagrama de los circuitos del LED y de la FR. Note que son dos circuitos independientes, alimentados por la misma batería. El circuito de la FR está "cerrado". El del LED está "abierto". Para "cerrarlo" debe conectar alguna resistencia en "?".

Tareas

II.1) Mida el voltaje de la batería, llámelo V_0, y escríbalo. Se supone que la pila es de 9 V, usted obtendrá un valor muy cercano. ¡No desprenda la batería de la tablita! (1.0 punto).

II.2) Usando los circuitos de resistencias estudiados en la Parte I, incluyendo los valores R_1, R_2 y R_3, varíe la corriente que pasa por el LED. En cada caso, mida el voltaje V_{LED} en el LED y el voltaje V_{FR} en la FR y reporte también la resistencia del circuito R_C. Use la Tabla II para reportar sus resultados. **NOTA: Si la medición del voltaje es mayor a 2V, ponga el dial del multímetro en 20. Si la medición del voltaje es menor a 2V, ponga el dial en 2000m.** (6 puntos).

Asegúrese de entender que dependiendo de la corriente que pase por el LED, este brillará mas o menos. Al mismo tiempo, dependiendo de la intensidad de la luz del LED, la resistencia de la FR será mayor o menor.

3. Determinación de la resistencia de la FR como función de la corriente en el LED. (7 puntos)

En la Parte anterior usted midió los voltajes en el LED y en la FR, variando la resistencia junto al LED. Ahora determinará la corriente I_{LED} en el LED y la resistencia R_{FR} de la FR y hallará la relación entre ellas.

Tareas

III.1) Muestre que la resistencia en la FR está dada por:

$$R_{\mathrm{FR}} = \frac{V_{\mathrm{FR}}}{V_0 - V_{\mathrm{FR}}} R_{10} \tag{1}$$

donde $R_{10} = 10$ kΩ es la resistencia en serie con la FR, vea Figura 5. (0.5 puntos). **Si no la puede mostrar, continúe con el resto del problema.**

III.2) Muestre que la corriente en el LED está dado por:

$$I_{\mathrm{LED}} = \frac{V_0 - V_{\mathrm{LED}}}{R_C + R_{0,5}} \tag{2}$$

donde $R_{0,5} = 0{,}5$ kΩ es la resistencia en serie con el LED, vea Figura 5. (0.5 puntos). **Si no la puede mostrar, continúe con el resto del problema.**

III.3) En la Tabla II reporte los valores de I_{LED} y de R_{FR}, correspondientes a los valores obtenidos en la Parte II. (1.0 puntos).

III.4) Los datos I_{LED} y de R_{FR} de la Tabla II, sugieren que existe una relación entre R_{FR} y I_{LED} (aproximadamente) de la forma,

$$R_{\mathrm{FR}} = A\, I_{\mathrm{LED}}^{P}, \tag{3}$$

con A un coeficiente y P un exponente (negativo). Proponga un cambio de variables que linealice esta ecuación, es decir, transforme la ecuación (3) a la forma,

$$y = m\,x + b \tag{4}$$

Identifique y, x, m y b. Use la Tabla III para reportar los valores de x y y. Grafique y vs x y realice un análisis gráfico para obtener los valores del coeficiente A y del exponente P ... ¡Esta es la relación buscada! (5 puntos).

Al terminar el examen, por favor desconecte la batería y coloque el dial del multímetro en *OFF*.

Tabla I

De la Parte 1, realice circuitos con la tablita (A), usando cables con caimanes, y mida la resistencia R_c del circuito. Numere los circuitos y haga los correspondientes diagramas o dibujos indicando su número. Incluya los valores R_1, R_2 y R_3 en la Tabla.

Circuito	R_C

Tabla II

De la Parte 2, escriba el valor del voltaje de la batería: $V_0 =$

De la Parte 2, reporte sus mediciones de los voltajes del LED, V_{LED} y los de la FR, V_{FR}. Indique la resistencia R_C del circuito que haya usado.

De la Parte 3, reporte los valores correspondientes de la corriente del LED I_{LED} y de la resistencia R_{FR}, vea las ecuaciones (1) y (2)

R_C	V_{LED}	V_{RF}	I_{LED}	R_{RF}

Tabla III

x	y

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Culiacán, Sinaloa
8-12 Noviembre, 2015
EXAMEN EXPERIMENTAL

Luz de un LED y su efecto en una fotorresistencia

Un **LED** (Diodo Emisor de Luz o Light Emitting Diode, por sus siglas en inglés) es un dispositivo electrónico que emite luz debido al movimiento de los electrones en un material semiconductor. Podemos decir, de manera sencilla, que la intensidad de la luz del LED depende de la corriente eléctrica que fluye por él.

Una **fotorresistencia (FR)** también es un material semiconductor pero con una resistencia muy alta a la corriente eléctrica, tal que al absorber luz reduce drásticamente su resistencia. Podemos decir, también de manera sencilla, que la resistencia de la FR depende de la intensidad de la luz que recibe.

En este problema exploraremos la relación entre (a) la corriente que fluye por un LED, cambiando la intensidad de la luz que emite, y (b) la resistencia que adquiere una FR debida a la luz del LED.

En el equipo experimental que se le entregó encontrará dos "tablitas"marcadas con (A) y (B). La tablita (B) contiene un circuito electrónico, que se le explicará más abajo, con un LED y una FR, cubiertos por un tubito negro de plástico (llamado *thermofit*). El tubito es necesario para que la FR sólo absorba la luz del LED y no la del medio ambiente. Si lo desea puede quitar con cuidado el tubito para que observe el LED y la FR. **Una vez que los observe, coloque con cuidado el tubito de tal manera que tape tanto al LED como a la FR.** Vea la Figura 1 si no desea quitar el tubito.

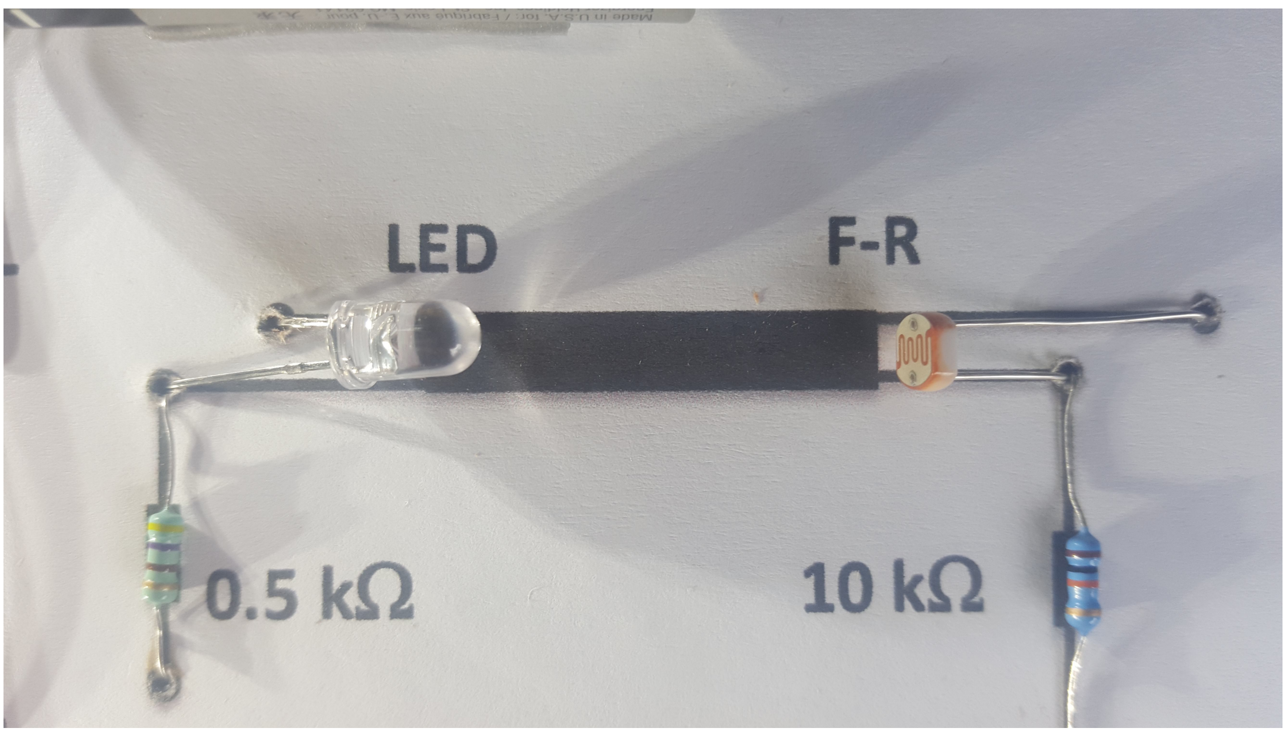


Figura 1: Se muestra el LED y la FR sin el tubito negro

El problema consiste de tres partes. En la primera estudiará los diferentes circuitos que puede formar con las tres resistencias de la tablita (A) y en la segunda y tercera partes, usará dichos circuitos para medir y determinar la relación entre la corriente que pasa por el LED y la resistencia del FR, debida a la luz del LED.

Material:

- Un multímetro con cables (rojo y negro) con puntas metálicas (cubiertas) en uno de sus extremos. Vea la Figura 2 para la conexión de los cables al multímetro.
- Una tablita, marcada (A), con 3 resistencias. Cada extremo de las resistencias está conectado a una terminal de cobre para su fácil conexión y medición. Figura 3. **Puede doblar ligeramente las terminales hacia abajo para su mejor uso, como en la figura.**
- Una tablita, marcada (B), con un circuito electrónico, una batería de aproximadamente 9 Volts (V), un LED, una FR y dos resistencias. Figura 4.
- 8 cables con "caimanes".
- Regla, escuadras, papel milimétrico, lápiz, goma, hojas en blanco.

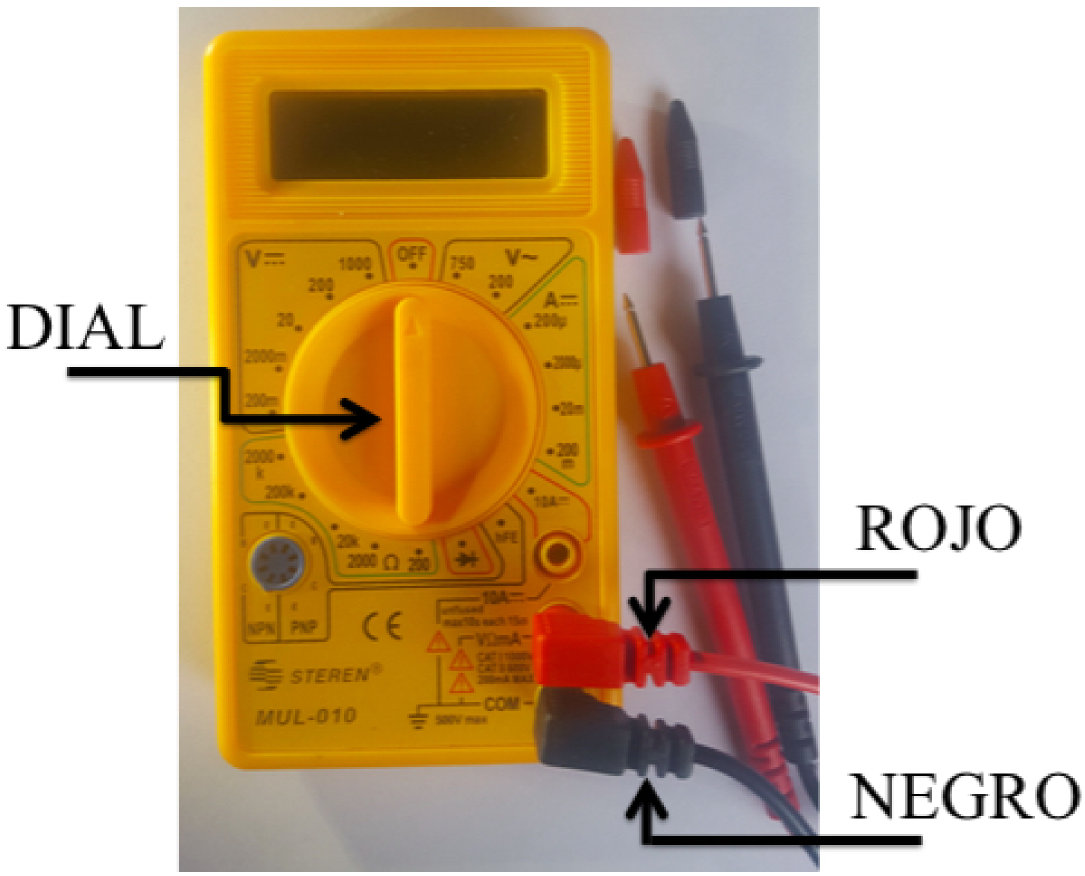


Figura 2: Multímetro. Conecte el cable negro en el contacto más bajo y el cable rojo en el siguiente hacia arriba. El dial o perilla le permite usar el multímetro como *voltímetro* (medidor de voltaje V); *ohmetro* (medidor de resistencia R); o*amperímetro* (medidor de corriente I).

Para este examen, el multímetro sólo se usará como voltímetro y como ohmetro. No intente usarlo como amperímetro pues no hay garantía de que funcione correctamente como tal, debido a que el fusible del multímetro puede estar dañado.

1. Circuitos con resistencias. (6 puntos)

En esta parte el multímetro lo usará para medir resistencias sólamente. Debido a que todas las resistencias que medirá estarán entre 0 y 50 kΩ (kilo-Ohms), coloque la perilla (o dial) en la zona de resistencia (Ω) ya sea en 20k o en 200k. Vea la Figura 3. Para medir la resistencia conecte el cable rojo del multímetro en un extremo de la resistencia y el cable negro en el otro. Use cables con caimanes para hacer un buen contacto eléctrico. Si el multímetro marca "1"quiere decir está fuera de escala y que debe mover el dial a la siguiente escala superior.

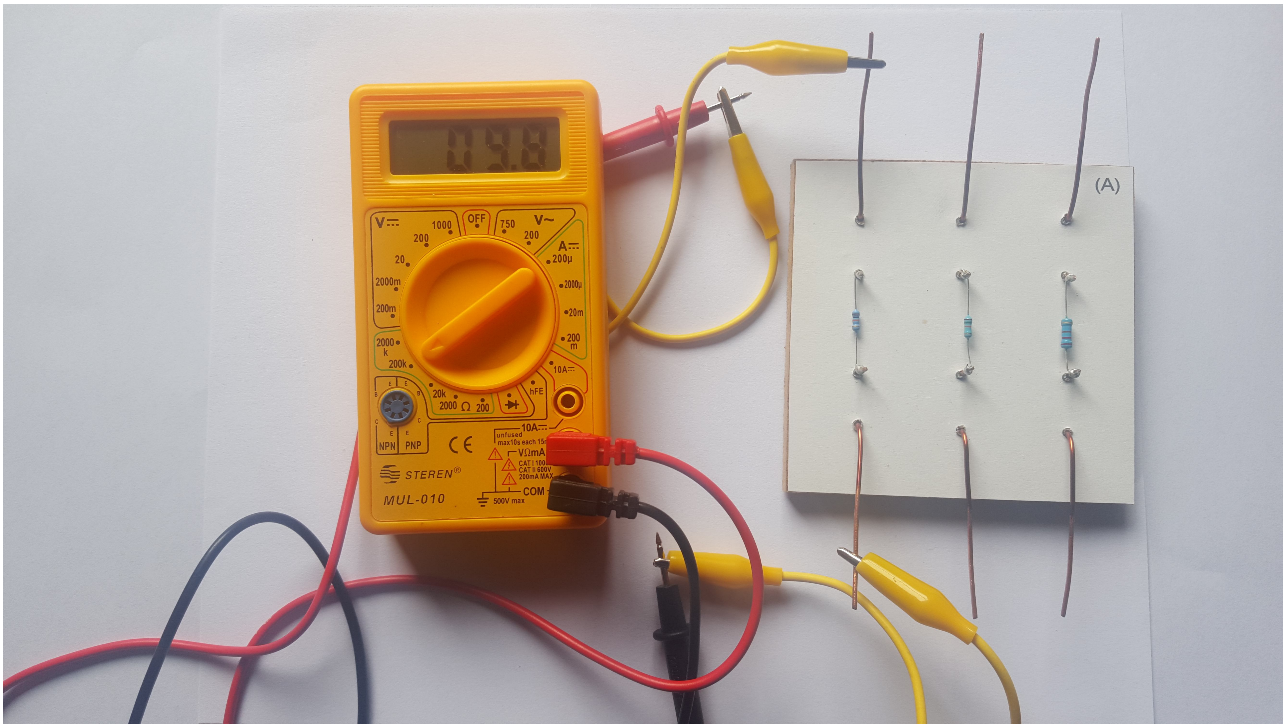


Figura 3: Tablita A con tres resistencias, R_1, R_2 y R_3, y con sus terminales para fácil conexión.

Tareas

1.1 Mida la resistencia de las 3 resistencias de la tablita (A), conectando los caimanes a las puntas de cobre, vea Figura 3. Llámelas R_1, R_2 y R_3, y escríbalas. Nota: aunque usted conozca el código de colores de las resistencias, mídalas. (1 punto).

1.2 Construya cuantos circuitos de resistencias pueda, usando las tres resistencias R_1, R_2 y R_3, conectándolas con los cables con caimanes y mida la resistencia total R_C obtenida en cada circuito. Asegúrese de incluir el circuito con menor resistencia y el circuito con mayor resistencia. Haga un dibujo o diagrama por cada circuito, indicando las conexiones entre las resistencias R_1, R_2 y R_3. Enumere sus circuitos y reporte la resistencia R_C de cada circuito usando la Tabla I. (5 puntos).

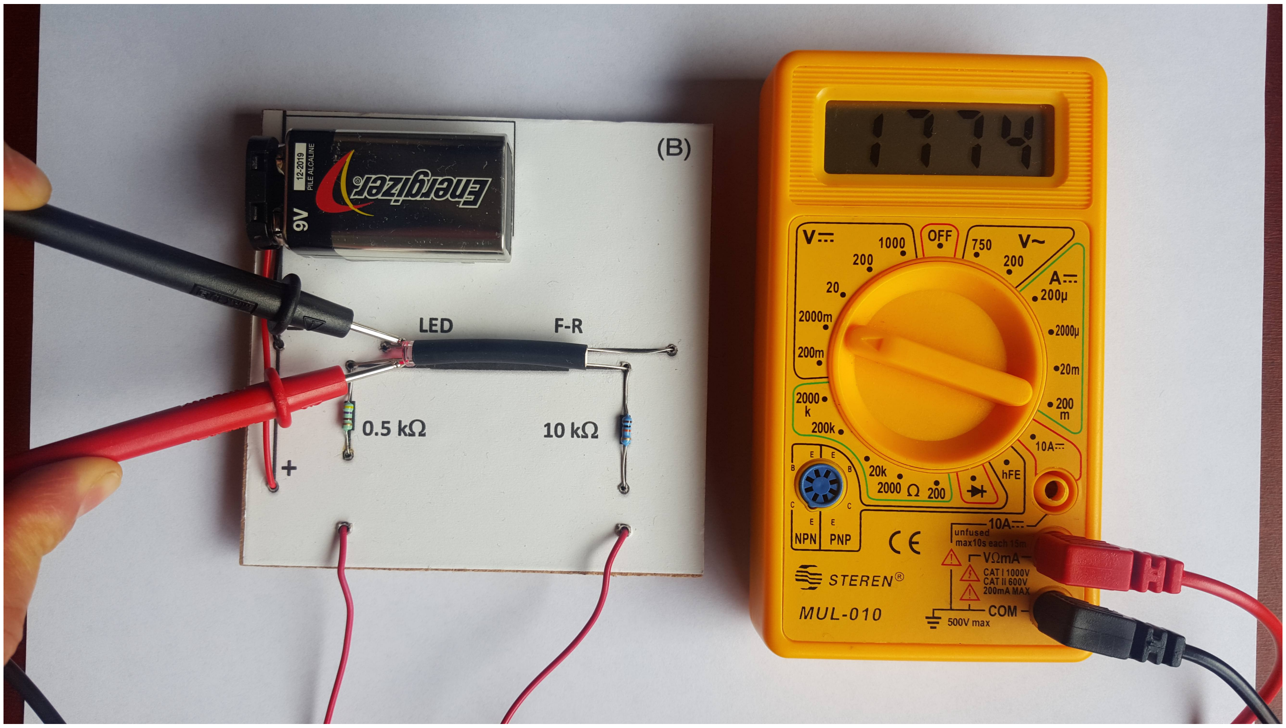


Figura 4: Medición de voltaje (V) en los dispositivos de la tablita B. Con el multímetro en 20 o 2000m en V, haga contacto entre la punta roja y extremo del dispositivo, y entre la punta negra y el otro extremo del dispositivo.
¡La batería debe estar conectada!

2. Voltajes en el LED y la FR, como función de la resistencia en el LED. (7 puntos)

En esta parte usará tanto la tablita (A) como la (B) y realizará sólo mediciones de voltaje. Debido a que los voltajes que medirá son todos menores a 10 V, coloqué el dial del multímetro en la zona de voltaje (V) en el valor 20 o 2000m, vea la Figura 4. Note que 2000m quiere decir que el máximo es 2000 milivolts, es decir 2 V; note también que en este caso la lectura del multímetro también está en milivolts.

Para medir el voltaje (V) en un dispositivo electrónico, coloque la punta roja en un extremo del dispositivo y la negra en el otro, vea la Figura 4. Si el valor aparece negativo, simplemente invierta la colocación de las puntas rojas y negras. Si lo desea, puede usar caimanes en las puntas, sin embargo, no es necesario usarlas si hace un buen contacto entre las puntas y lo que está midiendo.

Observe con detalle las conexiones en la tablita (B) y compárelas con las del diagrama de la Figura 5. Los cables negros son de corriente negativa y los rojos de positiva. Note que, aunque usamos una sóla batería, en realidad son dos circuitos independientes, uno para el LED y otro para la FR. Es decir, usamos la misma batería como fuente de alimentación eléctrica para los dos circuitos. Note también que el circuito de la FR ya está "cerrado", mientras que el del LED está "abierto", marcado con "?" en la Figura 5.

A partir de este momento, conecte la batería al broche.

Ahora, junte los extremos de los cables delgados rojos que salen de la tablita (B) (identifíquelos en el diagrama) y observe que el LED se enciende emitiendo luz roja. Como observará más adelante, la intensidad de la luz depende de la corriente que pasa por el LED.

Importante: Las resistencias, la de 0.5 kΩ conectada al LED y la de 10 kΩ conectada a la FR, son para "protección" de los circuitos, sin embargo, deberá tomarlas en cuenta en su análisis de la parte 3.

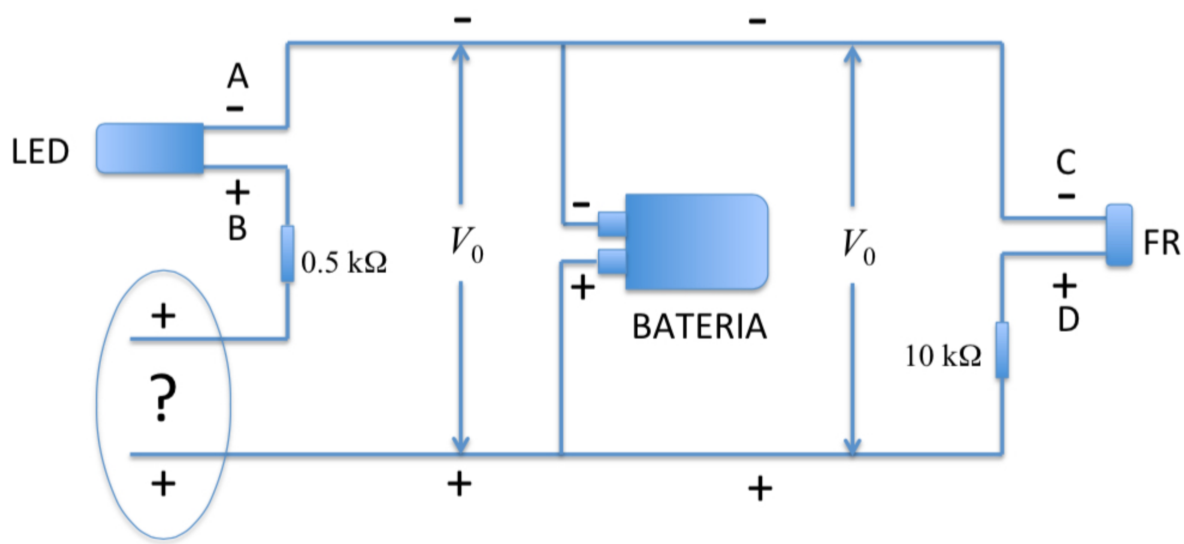


Figura 5: Diagrama de los circuitos del LED y de la FR. Note que son dos circuitos independientes, alimentados por la misma batería. El circuito de la FR está "cerrado". El del LED está "abierto". Para "cerrarlo" debe conectar alguna resistencia en "?".

Tareas

II.1) Mida el voltaje de la batería, llámelo V_0, y escríbalo. Se supone que la pila es de 9 V, usted obtendrá un valor muy cercano. ¡No desprenda la batería de la tablita! (1.0 punto).

II.2) Usando los circuitos de resistencias estudiados en la Parte I, incluyendo los valores R_1, R_2 y R_3, varíe la corriente que pasa por el LED. En cada caso, mida el voltaje V_{LED} en el LED y el voltaje V_{FR} en la FR y reporte también la resistencia del circuito R_C. Use la Tabla II para reportar sus resultados. **NOTA: Si la medición del voltaje es mayor a 2V, ponga el dial del multímetro en 20. Si la medición del voltaje es menor a 2V, ponga el dial en 2000m.** (6 puntos).

Asegúrese de entender que dependiendo de la corriente que pase por el LED, este brillará mas o menos. Al mismo tiempo, dependiendo de la intensidad de la luz del LED, la resistencia de la FR será mayor o menor.

3. Determinación de la resistencia de la FR como función de la corriente en el LED. (7 puntos)

En la Parte anterior usted midió los voltajes en el LED y en la FR, variando la resistencia junto al LED. Ahora determinará la corriente I_{LED} en el LED y la resistencia R_{FR} de la FR y hallará la relación entre ellas.

Tareas

III.1) Muestre que la resistencia en la FR está dada por:

$$R_{\mathrm{FR}} = \frac{V_{\mathrm{FR}}}{V_0 - V_{\mathrm{FR}}} R_{10} \tag{1}$$

donde $R_{10} = 10$ kΩ es la resistencia en serie con la FR, vea Figura 5. (0.5 puntos). **Si no la puede mostrar, continúe con el resto del problema.**

III.2) Muestre que la corriente en el LED está dado por:

$$I_{\mathrm{LED}} = \frac{V_0 - V_{\mathrm{LED}}}{R_C + R_{0.5}} \tag{2}$$

donde $R_{0.5} = 0.5$ kΩ es la resistencia en serie con el LED, vea Figura 5. (0.5 puntos). **Si no la puede mostrar, continúe con el resto del problema.**

III.3) En la Tabla II reporte los valores de I_{LED} y de R_{FR}, correspondientes a los valores obtenidos en la Parte II. (1 punto).

III.4) Los datos I_{LED} y de R_{FR} de la Tabla II, sugieren que existe una relación entre R_{FR} y I_{LED} (aproximadamente) de la forma,

$$R_{\mathrm{FR}} = A\, I_{\mathrm{LED}}^P, \tag{3}$$

con A un coeficiente y P un exponente (negativo). Proponga un cambio de variables que linealice esta ecuación, es decir, transforme la ecuación (3) a la forma,

$$y = m\, x + b \tag{4}$$

Identifique y, x, m y b. Use la Tabla III para reportar los valores de x y y. Grafique y vs x y realice un análisis gráfico para obtener los valores del coeficiente A y del exponente P ... Esta es la relación buscada! (5 puntos).

Tabla I

De la Parte 1, realice circuitos con la tablita (A), usando cables con caimanes, y mida la resistencia R_c del circuito. Numere los circuitos y haga los correspondientes diagramas o dibujos indicando su número. Incluya los valores R_1, R_2 y R_3 en la Tabla.

Circuito	$R_C/\text{k}\Omega$
1	4.68
2	5.95
3	6.79
4	8.88
5	9.87
6	14.96
7	21.8
8	24.8
9	31.6
10	36.7
11	46.6

CIRCUITOS

Las resistencias, de acuerdo a su código de colores son $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 15$ kΩ y $R_3 = 22$ kΩ. Los circuitos que se pueden hacer son en serie y en paralelo. Los siguientes son unos ejemplos. Las fórmulas en serie y en paralelo para N resistencias son:

$$R_S = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$$
$$\frac{1}{R_P} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

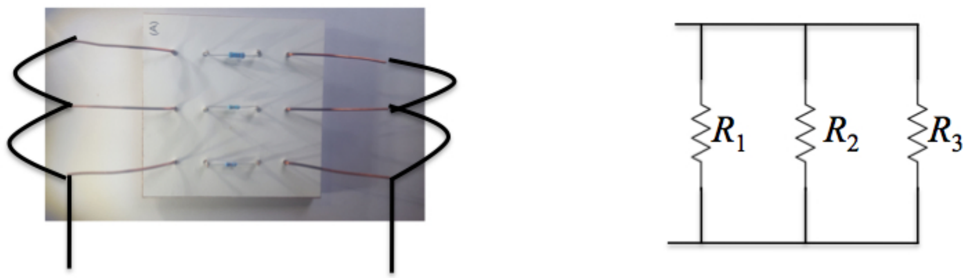


Figura 6: **Circuito 1**. $R1$, $R2$ y $R3$ en paralelo. $R_C = 4.68$ kΩ. Este es el circuito de menor resistencia.

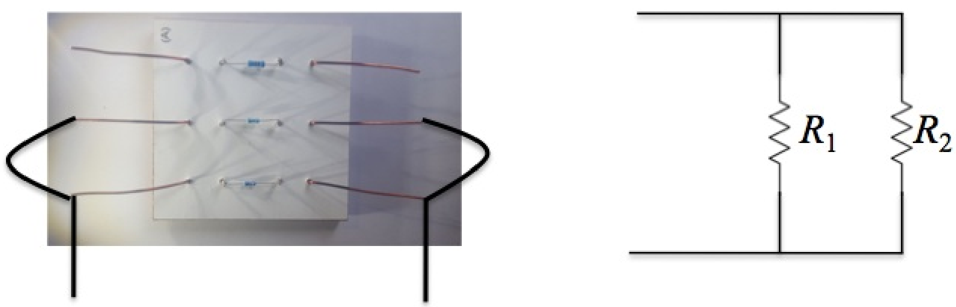


Figura 7: **Circuito 2**. $R1$ y $R2$ en paralelo. $R_C = 5.95$ kΩ.

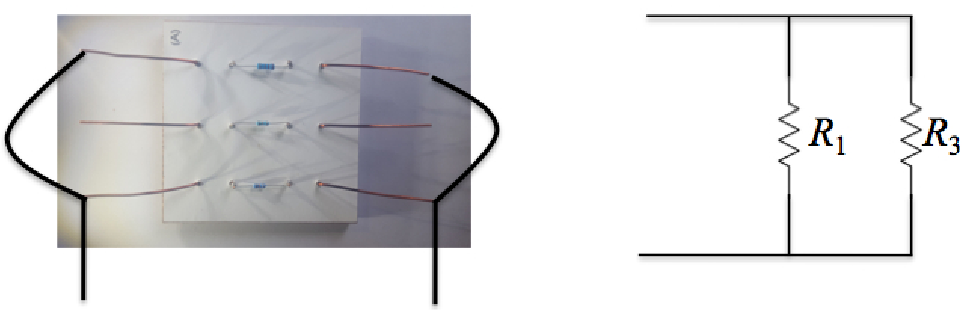


Figura 8: **Circuito 3**. $R1$ y $R3$ en paralelo. $R_C = 6.79$ kΩ.

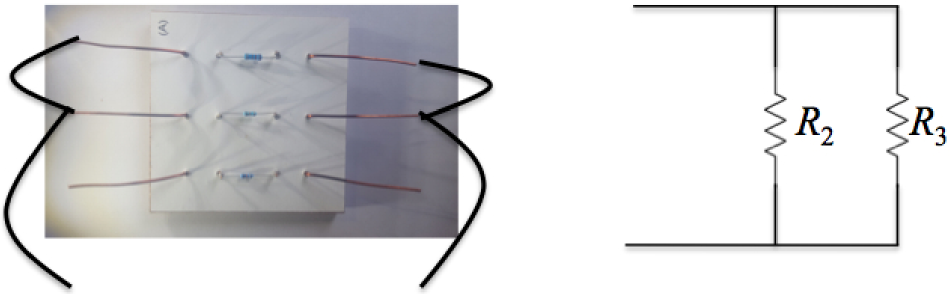


Figura 9: **Circuito 4**. $R2$ y $R3$ en paralelo. $R_C = 46.6$ kΩ. Este es el circuito de mayor resistencia.

Circuito 5 Resistencia $R_1 = 9.87$ kΩ.
Circuito 6 Resistencia $R_2 = 14.96$ kΩ.
Circuito 7 Resistencia $R_1 = 21.8$ kΩ.

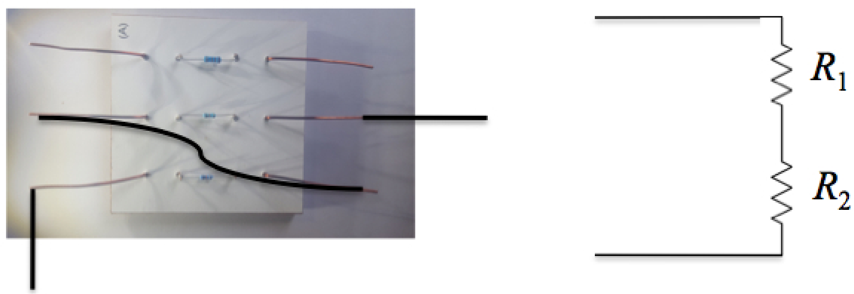


Figura 10: **Circuito 8**. $R1$ y $R2$ en serie. $R_C = 24.8$ kΩ.

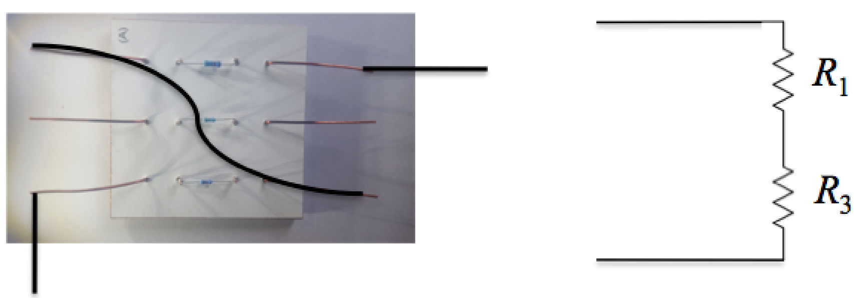


Figura 11: **Circuito 9**. $R1$ y $R3$ en serie. $R_C = 31.6$ kΩ.

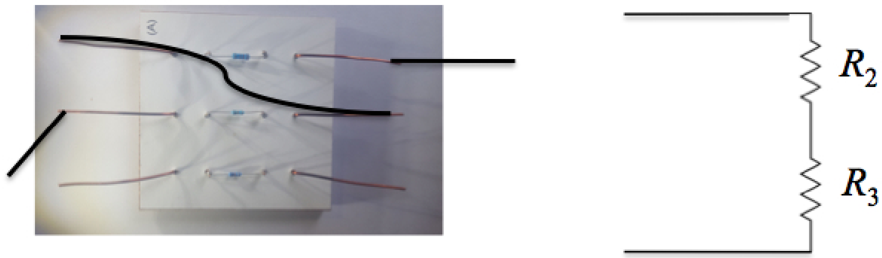


Figura 12: **Circuito 10**. $R2$ y $R3$ en serie. $R_C = 36.7$ kΩ.

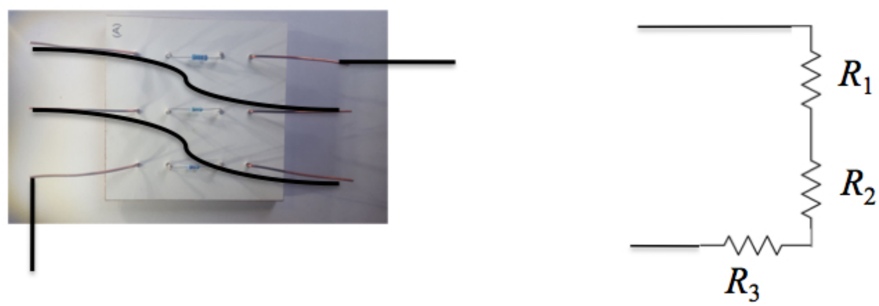


Figura 13: **Circuito 11**. $R1$, $R2$ y R_3 en serie. $R_C = 24.8$ kΩ.

Tabla II

De la Parte 2, escriba el valor del voltaje de la batería: $V_0 = 9.18$ V.

De la Parte 2, reporte sus mediciones de los voltajes del LED, V_{LED} y los de la FR, V_{FR}. Indique la resistencia R_C del circuito que haya usado.

De la Parte 3, reporte los valores correspondientes de la corriente del LED I_{LED} y de la resistencia R_{FR}, vea las ecuaciones (1) y (2)

R_C/kΩ	V_{LED}/V	V_{RF}/V	I_{LED}/mA	R_{RF}/kΩ
4.68	1.653	5.88	1.45	17.8
5.95	1.644	6.37	1.17	22.7
6.79	1.638	6.56	1.03	25.0
8.88	1.627	7.09	0.80	33.9
9.87	1.623	7.24	0.73	37.3
14.96	1.610	7.87	0.49	60.1
21.8	1.596	8.30	0.34	94.3
24.8	1.590	8.41	0.30	109.2
31.6	1.581	8.61	0.24	151.0
36.7	1.576	8.68	0.20	173.6
46.6	1.565	8.79	0.16	225.4

Tabla III

x	y
0.37	2.88
0.16	3.12
0.03	3.22
- 0.22	3.52
- 0.32	3.62
- 0.71	4.09
- 1.08	4.55
- 1.20	4.69
- 1.44	5.02
- 1.59	5.16
- 1.82	5.42

A la ecuación propuesta,

$$R_{\mathrm{FR}} = A\, I_{\mathrm{LED}}^{P}$$

tomamos logaritmos en ambos lados,

$$\ln R_{\mathrm{FR}} = P\ \ln I_{\mathrm{LED}}^{P} + \ln A$$

que es de la forma $y = mx + b$, con $y = \ln R_{\mathrm{FR}}$, $x = \ln I_{\mathrm{LED}}^{P}$, $m = P$ y $b = \ln A$.

De un análisis gráfico de la recta $y = mx + b$, se obtiene la pendiente m y la ordenada al origen b, y de estos los valores de P y A.

Desglose de puntaje

1. Circuitos con resistencias (6 puntos)

1.1 (1 punto). Los valores nominales de las resistencias son $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 15\,\mathrm{k\Omega}$ y $R_3 = 22\,\mathrm{k\Omega}$. Los valores medidos, muy reproducibles, son

$$R_1 = 9.87\,\mathrm{k\Omega} \quad R_2 = 14.96\,\mathrm{k\Omega} \quad R_3 = 21.8\,\mathrm{k\Omega}$$

• Se aceptará una desviación del $\pm 0.3\,\mathrm{k\Omega}$ del valor nominal.
• Por cada medición incorrecta descontar 0.3 puntos.

1.2 (5 puntos). Se esperan, al menos, 4 circuitos en serie y 4 en paralelo.
• Otorgar 0.5 puntos por cada uno: diagrama (0.2) y medición (0.3). El máximo a otorgar son 4 puntos.
• Bono de 0.5 puntos si se incluye la medición de menor resistencia (las tres resistencias en paralelo) y 0.5 puntos de la medición de mayor resistencia (las tres resistencias en serie).

2. Voltajes en el LED y en la FR. (7 puntos)

2.1 (1 punto). El voltaje nominal de la batería es de 9 V, sin embargo puede diferir hasta ± 1 V. Debe notarse que se midió!
• 0.5 puntos por valor dentro de $V0 = 9 \pm 1$ V y 0.5 si se verifica que midió.

2.2 (6 puntos) En la Tabla I:
• Deberán indicar la resistencia del circuito. Descontar 0.5 puntos si no ponen las unidades.
• En el voltaje de V_{LED}, descontar 0.2 puntos por medición si no está en la escala de 2 V. Dar cero por medicón si está más del 10 % del valor en la solución. VALORES MUY ESTABLES de V_{LED}!
• En el voltaje de V_{RF}, descontar 0.2 por medición si no dan tres cifras significativas. Los voltajes deben estar entre 4 V a 9 V. Dar cero por medicón si están fuera de ese rango. VALORES NO TAN ESTABLES de V_{RF}!
• Si son 8 mediciones o más y todo bien, se le dan los 6 puntos. Si no incluye el circuito de la resistencia menor y/o mayor se resta 0.5 puntos por cada omisión.
• Si son menos de 8 mediciones, se le da 0.25 por medición de V_{LED} y 0.25 por V_{RF}. Si son 6 o 7 mediciones, todas bien y están incluidas las resistencias menor y mayor se le da 1.0 punto mas.

3. Determinación de R_{FR} como función de I_{LED}. (7 puntos)

3.1 0.5 puntos. Deducción correcta de la fórmula 0.25 puntos. Se dará 0.25 si indica correctamente el circuito pero no deduce bien.

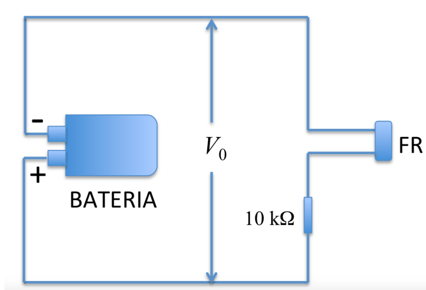


Figura 14: El circuito de la FR. Dependiendo de la intensidad de la luz recibida, se tiene un valor de R_{FR} en la FR.

De la figura observamos que la resistencia $R_{10} = 10\,\mathrm{k\Omega}$ y la resistencia de la FR R_{FR} están en serie. Por tanto,

$$V_0 = V_{\mathrm{FR}} + I\,R_{10}$$

donde I es la corriente que fluye por el circuito, despejando,

$$I = \frac{V_0 - V_{\rm FR}}{R_1 0}$$

Por otro lado la resistencia $R_{\rm FR} = V_{\rm FR}/I$, lo que nos da:

$$R_{\rm FR} = \frac{V_{\rm FR}}{V_0 - V_{\rm FR}} R_{10}$$

3.2 0.5 puntos. Deducción correcta de la fórmula 0.25. Se dará 0.25 si indica correctamente el circuito pero no deduce bien.

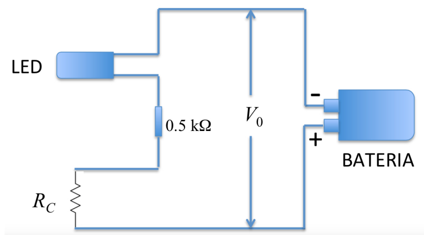


Figura 15: El circuito del LED. Dependiendo de la corriente $I_{\rm LED}$ el LED emite mas o menos luz.

De la figura observamos que el LED, la resistencia $R_{0.5} = 0.5$ kΩ y la resistencia del circuito R_C están en serie. Por lo tanto, la corriente $I_{\rm LED}$ es la misma en todos los elementos del circuito:

$$V_0 = (R_C + R_{0.5}) I_{\rm LED} + V_{\rm LED}$$

lo que da:

$$I_{\rm LED} = \frac{V_0 - V_{\rm LED}}{R_C + R_{0.5}}$$

3.3 1.0 puntos.No penalizar doble si los valores de $V_{\rm LED}$ y $V_{\rm REF}$ están mal, pero la sustitución bien. Si hace mala sustitución penalizar con criterio. Por ejemplo quitar 0.1 por cada sustitución incorrecta.

3.4 5.0 puntos. La gráfica:
• 0.25 puntos por correcta identificación de variables de la recta. 0.25 puntos por hacer bien la tabla III (cálculo de logaritmos).
• 3 puntos por la gráfica:
(1) Al menos 8 puntos bien graficados, incluidos menor y mayor (2 puntos). Restar 0.5 si menos de 8 puntos. Restar 0.25 si no incluye el menor y 0.25 sin no incluye mayor. Restar 0.15 por cada punto mal graficado.
(2) Uso correcto del papel (gráfica 70-80 % de la hoja), 0.5 puntos.
(3) Ejes etiquetados y 3 marcas al menos en los ejes, 0.5 puntos.

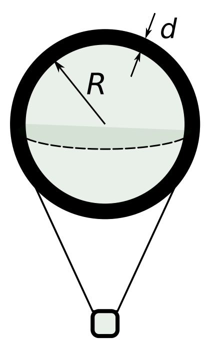
NOTA: USAR LOS MISMOS CRITERIOS SI GRAFICA $R_{\rm FR}$ vs $I_{\rm LED}$ en vez de y vs x.

• Si se hace gráfica y vs x, 0.25 puntos por correcta identificación de la pendiente, 0.25 puntos por correcta identificación de la ordenada. 0.5 por identificación de A y 0.5 por identificación de P.

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Culiacán Sinaloa 8-12 de noviembre de 2015
Prueba teórica

Problema 1 Ascensión de un globo (10 puntos)

El principio de Arquímedes establece que sobre un cuerpo sumergido dentro de un fluido se ejerce una fuerza de flotación que es igual al peso del volumen del fluido desalojado por el cuerpo. Esta fuerza de flotación en ciertos casos puede vencer a la fuerza de gravedad y hacer ascender al cuerpo sumergido dentro de un liquido o fluido y es bajo este principio el que se basa el funcionamiento de los globos aerostáticos.



Considere un globo aerostático de forma esférica. Suponga que el gas contenido dentro del globo y fuera del globo (la atmósfera) se comportan como gases ideales; denote a la densidad de masa del gas dentro del globo como ρ_{gs} y a la del aire de la atmósfera como ρ_a. Por otra parte, la cubierta del globo, que impide la entrada o salida de gas, está hecho de un material cuya densidad de masa es ρ_{gb} y tiene un grosor de d. Este grosor es mucho menor que el radio del globo, es decir, $d \ll R$.

Para simplificar el calculo considere que la masa extra que carga el globo es despreciable, suponga además que de manera general la presión dentro del globo es la misma que la del aire fuera del globo (atmósfera) (esto no es cierto, existe una diferencia de presión pero es pequeña). Es decir, suponemos que gas dentro del globo está en equilibrio de presión con la atmósfera.

En un modelo sencillo de las propiedades termodinámicas de la atmósfera, se supone que la temperatura es isotérmica, es decir que tiene la misma temperatura, independientemente de la altura. Sin embargo debido a los efectos de la gravedad sobre el aire la presión de la atmósfera varia con la altura h de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$P = P_0 e^{-Mgh/RT} \tag{1}$$

donde la presión atmosférica a nivel del mar ($h = 0$) es $P_0 = 1\,\text{atm} = 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$, la masa molar del aire de la atmósfera es $M = 28.8 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}$, $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ es la gravedad, la constante de los gases tiene el valor $R = 8.31\,\text{J/mol} \cdot \text{K}$ y la temperatura de la atmósfera es $T = 10\,°\text{C}$.

1	**Pregunta:** Calcula el valor de la densidad del aire de la atmósfera al nivel de mar. Denótala como ρ_0.	**2 puntos**

2	**Pregunta:** Determina una expresión para calcular el radio del globo R necesario para que el globo flote y se mantenga en equilibrio, la expresión debe estar en términos de la densidad del globo ρ_{gb}, la densidad del aire dentro del globo ρ_{gs}, la densidad de la atmósfera ρ_a y del grosor de la cubierta del globo d. **Sugerencia:** Debido a que el grosor $d \ll R$ es mucho menor que el radio del globo, aproxime el volumen de la cubierta del globo como $V_{cubierta} \approx 4\pi R^2 d$.	**2.5 puntos**

Inicialmente el globo flota en equilibrio al nivel del mar para lo cual el aire dentro del globo se calienta hasta una temperatura de $T_{gs} = 300\,°\text{C}$. La cubierta del globo está hecho de un material cuya densidad es $\rho_{gb} = 1\,\text{g/cm}^3$ y tiene un grosor de $d = 1\,\text{mm}$.

3	**Pregunta:** Considera que el globo flota en equilibrio a nivel del mar, calcula el valor del radio R y el volumen del globo cuando la temperatura del aire dentro del globo es $T_{gs} = 300\,°\text{C}$.	**2.5 puntos**

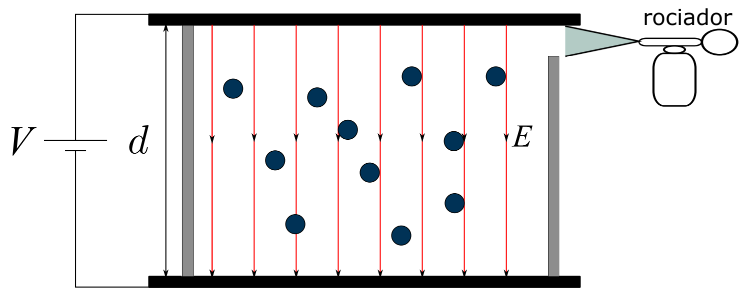
Si el globo se eleva rápidamente no tiene tiempo de intercambiar calor con la atmśfera. En ese caso podemos suponer que el gas dentro del globo sufre una expansión adiabática al elevarse y que, por lo tanto, el radio del globo aumenta con la altura. Si la relación entre las capacidades caloríficas del aire dentro del globo es: $c_p/c_V = \gamma = 7/5$

4	**Pregunta:** Cuál es el radio y el volumen del globo al elevarse 5000 m.	**3 puntos**

Problema 2 Experimento de Millikan (10 puntos)

Uno de los experimentos más importantes de la física fue realizado por los físicos norteamericanos Robert Millikan y Hervey Fletcher en el año 1909 en cual midieron la carga eléctrica del electrón. Desde finales del siglo XIX, a través de los experimentos con rayos catódicos, se sabía de la existencia de los electrones como partículas cargadas negativamente. El poder determinar el valor de dicha carga eléctrica era un reto para la física en esos momentos.

En el experimento de Millikan y Fletcher se empleó una cámara compuesta por un par de placas metálicas paralelas separados una distancia d y colocadas horizontalmente, ver figura. Las placas están conectadas a una diferencia de potencial V de tal manera que dentro de las placas hay un campo eléctrico uniforme E. Con un rociador se dispersan gotas de aceite dentro de la cámara y las gotas se cargan eléctricamente debido a la fricción que tienen con la válvula del rociador al ser expulsadas.



Si suponemos que las gotas son esferas que se cargan negativamente por haber adquirido varios electrones, entonces midiendo la carga de las gotas es posible determinar la carga del electrón.

Debido a las pequeñas dimensiones de las gotas de aceite es importante tomar en cuenta los efectos del aire sobre las gotas de aceite. En este caso el aire se comporta como un fluido dentro del cual las gotas de aceite se mueven.

Se sabe que cuando un cuerpo se mueve dentro de un fluido, además de las fuerzas de presión que el fluido ejerce, existe una fuerza de resistencia, o de fricción, debida a la viscosidad del fluido, que actúa en sentido contrario a su movimiento y es proporcional a la velocidad v con la que se mueve el cuerpo. Si el cuerpo es de forma esférica, esta fuerza de resistencia está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_r = -6\pi R\eta\vec{v} \tag{2}$$

donde R es el radio del cuerpo esférico y η es la viscosidad del fluido. Para el aire la viscosidad tiene el siguiente valor: $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa/s donde Pa es la unidad de presión en SI, Pa $=$ N/m^2. Dicha fuerza de fricción se llama *fuerza de Stokes*.

Debido a que la fuerza de resistencia siempre se opone al movimiento, llega un momento en que ésta compensa o iguala *todas* las demás fuerzas presentes. Es decir, después de cierto tiempo se alcanza una situación donde la fuerza total sobre el cuerpo es cero y el cuerpo se mueve con velocidad constante. A dicha velocidad se le conoce como *velocidad terminal*.

Por sencillez, supondremos que el movimiento de las gotas es estrictamente vertical, es decir, despreciaremos cualquier movimiento en otras direcciones.

El experimento de Millikan-Fletcher se divide en dos partes que se describen a continuación.

Parte 1

En la primer etapa el voltaje entre las placas es cero ("apagado") por lo que el campo eléctrico dentro de la cámara es cero. Bajo estas condiciones se observa que las gotas *caen*, al principio con cierta aceleración pero después de un lapso de tiempo las gotas alcanzan su velocidad terminal v_1 constante.

Sea la densidad de masa del aceite $\rho_o = 0.92\,\mathrm{g/cm^3}$, densidad del aire $\rho_a = 0.0013\,\mathrm{g/cm^3}$ y la aceleración de la gravedad $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$,

1	**Pregunta:** Si la velocidad terminal con la que cae una gota de aceite es $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor del radio R de la gota.	**3 puntos**

2	**Pregunta:** Para la misma gota de aceite que cae con la velocidad terminal del inciso anterior, $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor de la masa m_o de la gota.	**1 punto**

Parte 2

En la segunda parte del experimento se enciende el voltaje entre las placas y se genera un campo eléctrico uniforme dentro de la cámara, lo suficientemente alto, que ahora las gotas de aceite se *mueven hacia arriba* y alcanzan su velocidad terminal v_2. Considere que el voltaje aplicado es $V = 5000\,\mathrm{V}$ y que la distancia entre las placas metálicas es $d = 10\,\mathrm{mm}$.

3	**Pregunta:** Para la misma gota de la primera parte del experimento, que cae con velocidad terminal $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, si su velocidad terminal en la segunda etapa es $v_2 = 0.085\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor de la carga q de la gota.	**3 puntos**

Como acabas de mostrar en los incisos anteriores, si conocemos las velocidades terminales v_1 y v_2 para cada parte del experimento, *para la misma gota*, es posible determinar la carga de la gota. En la práctica hay diferentes tamaños en las gotas y cada gota adquiere varios electrones extras por lo que las velocidades v_1 y v_2 difieren para cada gota. Esto puede usarse en un análisis estadístico para hallar la carga del electrón. Aqui haremos una simplificación con sólo tres gotas y una suposición para hallarla.

En la siguiente tabla se reportan las mediciones hechas de las velocidades terminales v_1 y v_2 para tres gotas diferentes.

	velocidad v_1 (cm/s)	velocidad v_2 (cm/s)
gota 1	0.020	0.015
gota 2	0.038	0.00025
gota 3	0.041	0.0081

4	**Pregunta:** Para los valores de v_1 y v_2 de la tabla calcula el valor de la carga para cada una de las gotas. Suponiendo ahora que la carga obtenida de cada gota es un múltiplo entero de la carga del electrón e, halla los valores *mínimos* enteros posibles que estén de acuerdo con los valores de las cargas obtenidos. Determina de esta manera el valor de la carga del electrón. **Sugerencia:** Haz la suposición que las cargas obtenidas son $q_1 = n_1 e$, $q_2 = n_2 e$ y $q_3 = n_3 e$, con n_1, n_2 y n_3 valores enteros y halla sus valores mínimos posibles.	**3 puntos**

Problema 3 Estimación de la edad del Sol	**(10 puntos)**

Este problema consiste en estimar la edad del Sol suponiendo que la energía total que irradia se debe a su contracción gravitacional. La temperatura del Sol se calculará considerando que se comporta como un cuerpo negro. La formación del Sol comenzó a partir de una nube muy grande de gas y polvo que debido a los efectos gravitacionales de ha comprimido hasta tener las dimensiones actuales. El Sol puede considerarse como una esfera de gas con un radio actual de $R_S = 6.95 \times 10^5$ km y una densidad de masa $\rho_S = 1.4 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.

La energía gravitacional de una esfera de masa M y radio R esta dada por la siguiente expresión:

$$U_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{3}$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$ es la constante gravitacional.

La ley de Stefan-Boltzmann establece que la potencia por unidad de área que radía un cuerpo depende de la temperatura a la que se encuentra el cuerpo y está dada por la siguiente expresión:

$$H = \sigma T^4 \tag{4}$$

donde H es la potencia por unidad de área que emite el cuerpo negro y $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann y T la temperatura.

1	**Pregunta:** Si el radio del Sol en su etapa inicial cuando se estaba formando era muy grande comparado con su radio actual, calcula el cambio de su energía gravitacional debido a está contracción. **Sugerencia:** Considera que el radio inicial del Sol era tan grande, comparado con el actual, que puede considerarse como infinito.	**3 puntos**

Sobre la superficie terrestre se han hecho mediciones de la cantidad de energía que recibe del Sol en forma de radiación. La constante solar K que es la potencia por unidad de área recibida del Sol sobre la superficie terrestre tiene el valor:

$$K = 1366\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \tag{5}$$

Por otra parte, puedes considerar que la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita circular con un periodo de 365 días.

2	**Pregunta:** Calcula el valor de la potencia total emitida por el Sol.	**3 puntos**

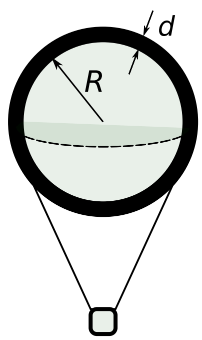
3	**Pregunta:** Considerando que la energía que radía el Sol se debe solamente a la contracción gravitacional, y suponiendo que que la energía por unidad de tiempo que ha estado radiando desde su inició es constante, calcula la edad del Sol y exprésala en años (terrestres).	**2 puntos**

4	**Pregunta:** Si el Sol se considera como un cuerpo negro, estima la temperatura del Sol.	**2 puntos**

XXVI OLIMPIADA NACIONAL DE FÍSICA
Culiacán Sinaloa 8-12 de noviembre de 2015
Prueba teórica

Problema 1 Ascensión de un globo (10 puntos)

El principio de Arquímedes establece que sobre un cuerpo sumergido dentro de un fluido se ejerce una fuerza de flotación que es igual al peso del volumen del fluido desalojado por el cuerpo. Esta fuerza de flotación en ciertos casos puede vencer a la fuerza de gravedad y hacer ascender al cuerpo sumergido dentro de un liquido o fluido y es bajo este principio el que se basa el funcionamiento de los globos aerostáticos.



Considere un globo aerostático de forma esférica. Suponga que el gas contenido dentro del globo y fuera del globo (la atmósfera) se comportan como gases ideales; denote a la densidad de masa del gas dentro del globo como ρ_{gs} y a la del aire de la atmósfera como ρ_a. Por otra parte, la cubierta del globo, que impide la entrada o salida de gas, está hecho de un material cuya densidad de masa es ρ_{gb} y tiene un grosor de d. Este grosor es mucho menor que el radio del globo, es decir, $d \ll R$.

Para simplificar el calculo considere que la masa extra que carga el globo es despreciable, suponga además que de manera general la presión dentro del globo es la misma que la del aire fuera del globo (atmósfera) (esto no es cierto, existe una diferencia de presión pero es pequeña). Es decir, suponemos que gas dentro del globo está en equilibrio de presión con la atmósfera.

En un modelo sencillo de las propiedades termodinámicas de la atmósfera, se supone que la temperatura es isotérmica, es decir que tiene la misma temperatura, independientemente de la altura. Sin embargo debido a los efectos de la gravedad sobre el aire la presión de la atmósfera varia con la altura h de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$P = P_0 e^{-Mgh/RT} \tag{1}$$

donde la presión atmosférica a nivel del mar ($h = 0$) es $P_0 = 1\,\text{atm} = 1.013 \times 10^5\,\text{Pa}$, la masa molar del aire de la atmósfera es $M = 28.8 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}$, $g = 9.8\,\text{m/s}^2$ es la gravedad, la constante de los gases tiene el valor $R = 8.31\,\text{J/mol}\cdot\text{K}$ y la temperatura de la atmósfera es $T = 10\,°\text{C}$.

1	**Pregunta:** Calcula el valor de la densidad del aire de la atmósfera al nivel de mar. Denótala como ρ_0.	**2 puntos**

Solución
Si el aire de la atmósfera se comportan como gas ideal entonces:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{P_0 M_a}{RT_a} = \frac{\left(1.013 \times 10^5\,\text{Pa}\right)\left(28.8 \times 10^{-3}\,\text{kg/mol}\right)}{(8.31\,\text{J/mol}\cdot\text{K})\,(283\,\text{K})} = 1.24\,\text{kg/m}^3} \tag{2}$$

(1 pt) escribir ecuación de gas ideal en su forma $PV = nRT$
(0.5 pt) escribir ecuación de gas ideal en su forma $\rho = PM/RT$
(0.5 pt) valor numérico correcto.

Ecuación de gas ideal:

$$pV = nRT, \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{PM}{RT}, \quad \begin{cases} \text{densidad de masa} & \rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{nM}{V} \\ \text{masa molar} & M = N_A \mu \end{cases} \tag{3}$$

M es la masa molar, μ es la masa atómica (molecular).

2	**Pregunta:** Determina una expresión para calcular el radio del globo R necesario para que el globo flote y se mantenga en equilibrio, la expresión debe estar en términos de la densidad del globo ρ_{gb}, la densidad del aire dentro del globo ρ_{gs}, la densidad de la atmósfera ρ_a y del grosor de la cubierta del globo d. **Sugerencia:** Debido a que el grosor $d \ll R$ es mucho menor que el radio del globo, aproxime el volumen de la cubierta del globo como $V_{cubierta} \approx 4\pi R^2 d$.	**2.5 puntos**

Solución

$$\begin{aligned} \text{peso de la cubierta del globo} \quad & W_{gb} = \rho_{gb} g V_{cubierta} = \rho_{gb} g 4\pi R^2 d \\ \text{peso del aire dentro del gas} \quad & W_{gs} = \rho_{gs} g V_{globo} = \rho_{gs} g \frac{4}{3}\pi R^3 \\ \text{fuerza de flotación} \quad & F_b = \rho_a g V_{globo} = \rho_a g \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned} \tag{4}$$

Por equilibrio de fuerzas

$$W_{gb} + W_{gs} = F_b \tag{5}$$

sustituyendo y simplificando se obtiene una ecuación lineal para el radio R:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_{gs} - \rho_a) + 4\pi \rho_{gb} R^2 d &= 0 \\ (\rho_{gs} - \rho_a) R + 3\rho_{gb} d &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

(1.0 pt) escribir correctamente la ecuación del equilibrio de fuerzas.
Resolviendo para R:

$$\boxed{R = \frac{3\rho_{gb} d}{(\rho_a - \rho_{gs})}} \tag{7}$$

Para que el globo flote es necesario que $\rho_a > \rho_{gs}$, lo cual esta de acuerdo con $R > 0$.
(1.5 pt) expresión del radio de la gota (resolver ecuación cuadrática).

Inicialmente el globo flota en equilibrio al nivel del mar para lo cual el aire dentro del globo se calienta hasta una temperatura de $T_{gs} = 300\,^\circ\mathrm{C}$. La cubierta del globo está hecho de un material cuya densidad es $\rho_{gb} = 1\,\mathrm{g/cm^3}$ y tiene un grosor de $d = 1\,\mathrm{mm}$.

3	**Pregunta:** Considera que el globo flota en equilibrio a nivel del mar, calcula el valor del radio R y el volumen del globo cuando la temperatura del aire dentro del globo es $T_{gs} = 300\,^\circ\mathrm{C}$.	**2.5 puntos**

Solución

El gas dentro del globo y el de la atmósfera se comportan como gas ideal:

$$\text{gas dentro del globo:}\quad \rho_{gs} = \frac{P_{gs}M_{gs}}{RT_{gs}}, \qquad \text{atmósfera:}\quad \rho_a = \frac{P_a M_a}{RT_a}, \tag{8}$$

(1.0 pt) escribir ecuación de gas ideal para gas dentro del globo y para la atmósfera.

según el enunciado del problema la presión dentro y fuera del globo es la misma y el gas dentro del globo es el mismo que el de la atmósfera (misma masa molar). Entonces dividiento ambas ecuaciones:

$$\frac{\rho_{gs}}{\rho_a} = \frac{\cancel{P_{gs}}}{\cancel{P_a}}\frac{\cancel{M_{gs}}}{\cancel{M_a}}\frac{T_a}{T_{gs}}, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho_{gs}}{\rho_a} = \frac{T_a}{T_{gs}} = \frac{273+10\,\mathrm{K}}{273+300\,\mathrm{K}} = \frac{283\,\mathrm{K}}{573\,\mathrm{K}} = 0.49 \tag{9}$$

(0.5 pt) relación entre densidades.

sustituyendo en la ecuación (7) determinanda en el inciso anterior:

$$\begin{aligned} R &= \frac{3\rho_{gb}d}{(\rho_a - 0.49\rho_a)} = \frac{3\left(10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)(0.001\,\mathrm{m})}{\rho_0\,(1-0.49)} \\ &= \frac{3\left(10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right)(0.001\,\mathrm{m})}{(1.2\,\mathrm{kg/m^3})\,(0.51)} = \boxed{4.9\,\mathrm{m}} \end{aligned} \tag{10}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del radio.

donde la densidad de la atmósfera a nivel del es $\rho_0 = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$. El volumen del globo:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi\,(4.9\,\mathrm{m})^3 = 492.8\,\mathrm{m^3}} \tag{11}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del volumen.

Si el globo se eleva rápidamente no tiene tiempo de intercambiar calor con la atmśfera. En ese caso podemos suponer que el gas dentro del globo sufre una expansión adiabática al elevarse y que, por lo tanto, el radio del globo aumenta con la altura. Si la relación entre las capacidades caloríficas del aire dentro del globo es: $c_p/c_V = \gamma = 7/5$

4	**Pregunta:** Cuál es el radio y el volumen del globo al elevarse 5000 m.	**3 puntos**

Solución

Si P_0, V_0 es la presión y el volumen del globo a nivel del mar y P_H, V_H a la altura H. En un proceso adiabático:

$$P_0 V_0^{\gamma} = P_H V_H^{\gamma} \quad \Rightarrow \quad P_0 R_0^{3\gamma} = P_H R_H^{3\gamma} \tag{12}$$

(1 pt) escribir la ecuación de un proceso adiabático.

Sustituyendo la expresión de la presión como función de la altura, ecuación (1), el radio del globo a la altura H es:

$$R_H = R_0 \left(\frac{P_0}{P_H}\right)^{1/3\gamma} = R_0 e^{MgH/3\gamma RT} \tag{13}$$

(1 pt) considerar la ecuación (1) de la presión como función de la altura.

Sustituyendo valores:

$$\begin{gathered}\frac{Mg}{3\gamma RT} = \frac{\left(28.8\times10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}\right)\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)}{3\left(\frac{7}{5}\right)\left(8.31\,\mathrm{J/mol\cdot K}\right)\left(283\,\mathrm{K}\right)} = 2.86\times10^{-5} \\ \frac{Mg}{3\gamma RT}H = 2.86\times10^{-5}\times 5000\,\mathrm{m} = 0.143\end{gathered} \tag{14}$$

$$\boxed{R_H = (4.9\,\mathrm{m})\, e^{0.143} = 5.65\,\mathrm{m}} \tag{15}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del radio.

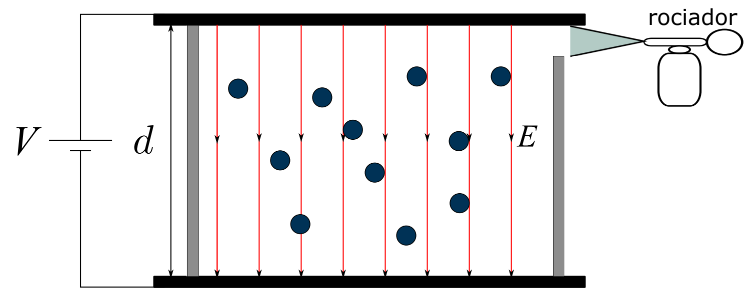
$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi\,(5.65\,\mathrm{m})^3 = 755.5\,\mathrm{m}^3} \tag{16}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto del volumen.

Problema 2 Experimento de Millikan **(10 puntos)**

Uno de los experimentos más importantes de la física fue realizado por los físicos norteamericanos Robert Millikan y Hervey Fletcher en el año 1909 en cual midieron la carga eléctrica del electrón. Desde finales del siglo XIX, a través de los experimentos con rayos catódicos, se sabía de la existencia de los electrones como partículas cargadas negativamente. El poder determinar el valor de dicha carga eléctrica era un reto para la física en esos momentos.

En el experimento de Millikan y Fletcher se empleó una cámara compuesta por un par de placas metálicas paralelas separados una distancia d y colocadas horizontalmente, ver figura. Las placas están conectadas a una diferencia de potencial V de tal manera que dentro de las placas hay un campo eléctrico uniforme E. Con un rociador se dispersan gotas de aceite dentro de la cámara y las gotas se cargan eléctricamente debido a la fricción que tienen con la válvula del rociador al ser expulsadas.



Si suponemos que las gotas son esferas que se cargan negativamente por haber adquirido varios electrones, entonces midiendo la carga de las gotas es posible determinar la carga del electrón.

Debido a las pequeñas dimensiones de las gotas de aceite es importante tomar en cuenta los efectos del aire sobre las gotas de aceite. En este caso el aire se comporta como un fluido dentro del cual las gotas de aceite se mueven.

Se sabe que cuando un cuerpo se mueve dentro de un fluido, además de las fuerzas de presión que el fluido ejerce, existe una fuerza de resistencia, o de fricción, debida a la viscosidad del fluido, que actúa en sentido contrario a su movimiento y es proporcional a la velocidad v con la que se mueve el cuerpo. Si el cuerpo es de forma esférica, esta fuerza de resistencia está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_r = -6\pi R\eta\vec{v} \tag{17}$$

donde R es el radio del cuerpo esférico y η es la viscosidad del fluido. Para el aire la viscosidad tiene el siguiente valor: $\eta = 1.8 \times 10^{-5}$ Pa/s donde Pa es la unidad de presión en SI, Pa = N/m^2. Dicha fuerza de fricción se llama *fuerza de Stokes*.

Debido a que la fuerza de resistencia siempre se opone al movimiento, llega un momento en que ésta compensa o iguala *todas* las demás fuerzas presentes. Es decir, después de cierto tiempo se alcanza una situación donde la fuerza total sobre el cuerpo es cero y el cuerpo se mueve con velocidad constante. A dicha velocidad se le conoce como *velocidad terminal*.

Por sencillez, supondremos que el movimiento de las gotas es estrictamente vertical, es decir, despreciaremos cualquier movimiento en otras direcciones.

El experimento de Millikan-Fletcher se divide en dos partes que se describen a continuación.

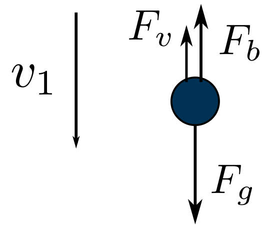
Parte 1

En la primer etapa el voltaje entre las placas es cero ("apagado") por lo que el campo eléctrico dentro de la cámara es cero. Bajo estas condiciones se observa que las gotas *caen*, al principio con cierta aceleración pero después de un lapso de tiempo las gotas alcanzan su velocidad terminal v_1 constante.

Sea la densidad de masa del aceite $\rho_o = 0.92\,\mathrm{g/cm^3}$, densidad del aire $\rho_a = 0.0013\,\mathrm{g/cm^3}$ y la aceleración de la gravedad $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$,

1	**Pregunta:** Si la velocidad terminal con la que cae una gota de aceite es $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor del radio R de la gota.	**3 puntos**

Solución



Si la gota se mueve con velocidad constante entonces la suma de fuerzas es cero. En este caso la fuerza de resistencia del aire es hacia arriba ya que la gota esta cayendo.

$$F_g = F_b + F_r, \qquad \Rightarrow \quad \rho_o g \frac{4}{3}\pi R^3 = \rho_a g \frac{4}{3}\pi R^3 + 6\pi R \eta v_1 \tag{18}$$

(1.5 pt) escribir correctamente la ecuación del equilibrio de fuerzas.
donde $F_g = \rho_o g V$ es la fuerza de gravedad, $F_b = \rho_a g V$ es la fuerza de flotación sobre las gotas debido al aire y F_r es la fuerza de resistencia del aire. Despejando el radio R de la gota se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{\frac{9 v_1 \eta}{2g\left(\rho_o - \rho_a\right)}} \\ &= \sqrt{\frac{9\,(0.095\times 10^{-2}\,\mathrm{m/s})\,(1.8\times 10^{-5}\,\mathrm{Pa/s})}{2\times 9.8\,\mathrm{m/s^2}\,(0.92\times 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3} - 0.0013\times 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3})}} \\ R &= \boxed{2.92\times 10^{-6}\,\mathrm{m}} \end{aligned} \tag{19}$$

(1 pt) expresión correcta del radio de la gota (despejar).
(0.5 pt) valor numérico correcto.

2	**Pregunta:** Para la misma gota de aceite que cae con la velocidad terminal del inciso anterior, $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor de la masa m_o de la gota.	**1 punto**

Solución
Conociendo la densidad del aceite $\rho_o = 0.92\,\mathrm{g/cm^3}$, entonces la masa de la gota de aceite es:

$$m_o = \rho_o V_o = \rho_o \frac{4}{3}\pi R^3 \tag{20}$$

(0.5 pt) expresión de la densidad de masa.
sustituyendo la expresión para el radio de las gotas obtenido en el inciso anterior:

$$m_o = \frac{4\pi}{3}\left(0.92\times 10^{3}\,\mathrm{kg/m^3}\right)\times\left(2.92\times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^3 = \boxed{9.63\times 10^{-14}\,\mathrm{kg}} \tag{21}$$

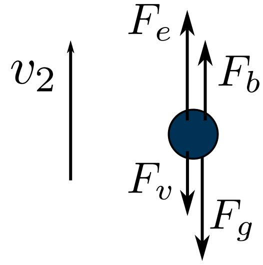
(0.5 pt) valor numérico correcto.

Parte 2

En la segunda parte del experimento se enciende el voltaje entre las placas y se genera un campo eléctrico uniforme dentro de la cámara, lo suficientemente alto, que ahora las gotas de aceite se *mueven hacia arriba* y alcanzan su velocidad terminal v_2. Considere que el voltaje aplicado es $V = 5000\,\mathrm{V}$ y que la distancia entre las placas metálicas es $d = 10\,\mathrm{mm}$.

3	**Pregunta:** Para la misma gota de la primera parte del experimento, que cae con velocidad terminal $v_1 = 0.095\,\mathrm{cm/s}$, si su velocidad terminal en la segunda etapa es $v_2 = 0.085\,\mathrm{cm/s}$, calcula el valor de la carga q de la gota.	**3 puntos**

Solución



La suma de fuerzas es cero, en este caso la fuerza de resistencia F_r está dirigida hacia abajo ya que la gota se mueve hacia arriba:

$$F_g + F_r = F_b + F_e, \qquad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_o g + 6\pi R\eta v_2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_a g + |q|\, E \tag{22}$$

(1.5 pt) escribir correctamente la ecuación del equilibrio de fuerzas.
despejando q se obtiene ($E = V/d$):

$$|q| = \frac{d}{V}\frac{4}{3}\pi R^3 g\left(\rho_o - \rho_a\right) + \frac{d}{V} 6\pi R\eta v_2 \tag{23}$$

(0.5 pt) expresión correcta de la carga de la gota (despejar).
Para la gota $R = 2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$
Primer término:

$$\begin{aligned} &\frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{5000\,\mathrm{V}} \frac{4\pi\left(9.8\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(0.92 - 0.0013\right) 10^3\,\mathrm{kg/m^3}}{3} \left(2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^3 \\ &= \left(0.075\,\mathrm{C/m^3}\right)\left(2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^3 = 1.8 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} \end{aligned} \tag{24}$$

Segundo término:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{10^{-2}\,\mathrm{m}}{5000\,\mathrm{V}} 6\pi\left(1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa/s}\right)}_{6.78\times10^{-10}} \left(v_2 = 0.085 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s}\right)\left(2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right) \\ &= 1.68 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} \end{aligned} \tag{25}$$

Carga de la gota:

$$|q| = 1.8 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} + 1.68 \times 10^{-18}\,\mathrm{C} = 35.70 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{26}$$

(1 pt) valor numérico correcto.

Como acabas de mostrar en los incisos anteriores, si conocemos las velocidades terminales v_1 y v_2 para cada parte del experimento, *para la misma gota*, es posible determinar la carga de la gota. En la práctica hay diferentes tamaños en las gotas y cada gota adquiere varios electrones extras por lo que las velocidades v_1 y v_2 difieren para cada gota. Esto puede usarse en un análisis estadístico para hallar la carga del electrón. Aqui haremos una simplificación con sólo tres gotas y una suposición para hallarla.

En la siguiente tabla se reportan las mediciones hechas de las velocidades terminales v_1 y v_2 para tres gotas diferentes.

	velocidad v_1 (cm/s)	velocidad v_2 (cm/s)
gota 1	0.020	0.015
gota 2	0.038	0.00025
gota 3	0.041	0.0081

4	**Pregunta:** Para los valores de v_1 y v_2 de la tabla calcula el valor de la carga para cada una de las gotas. Suponiendo ahora que la carga obtenida de cada gota es un múltiplo entero de la carga del electrón e, halla los valores *mínimos* enteros posibles que estén de acuerdo con los valores de las cargas obtenidos. Determina de esta manera el valor de la carga del electrón. **Sugerencia:** Haz la suposición que las cargas obtenidas son $q_1 = n_1 e$, $q_2 = n_2 e$ y $q_3 = n_3 e$, con n_1, n_2 y n_3 valores enteros y halla sus valores mínimos posibles.	**3 puntos**

Solución

De la misma manera que se hizo en el inciso anterior se puede calcular la carga para cada gota, primero se calcula el radio de la gota para la velocidad v_1, ecuación (19), con este valor y v_2 se calcula la carga de la gota, ecuación (23). Los valores son:

velocidad v_1 (cm/s)	velocidad v_2 (cm/s)	radio gota ($\times 10^{-6}$ m)	q (10^{-19} C)
0.020	0.015	1.34	$q_1 =$3.18
0.038	0.00025	1.85	$q_2 =$4.79
0.041	0.0081	1.92	$q_3 =$6.39

(2 pt) los tres valores correctos de la carga.

Si se divide cada una de las cargas entre la de menor valor, q_1 en este caso, se obtienen fracciones simples:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{4.79}{3.18} = 1.5 = \frac{3}{2} = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \frac{q_3}{q_1} = \frac{6.39}{3.18} = 2 = \frac{n_3}{n_1} \tag{27}$$

de tal manera que $n_1 = 1$ no es posible pues $n_2 = 3/2$ que no es entero. Por lo tanto $n_1 = 2$, $n_2 = 3$ y $n_3 = 4$ son los valores mínimos:

$$e = \frac{q_1}{2} = \frac{3.18}{2} \times 10^{-19}\,\mathrm{C} = 1.59 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \tag{28}$$

(1 pt) valor de la carga del electrón.

Problema 3 Estimación de la edad del Sol	**(10 puntos)**

Este problema consiste en estimar la edad del Sol suponiendo que la energía total que irradia se debe a su contracción gravitacional. La temperatura del Sol se calculará considerando que se comporta como un cuerpo negro. La formación del Sol comenzó a partir de una nube muy grande de gas y polvo que debido a los efectos gravitacionales de ha comprimido hasta tener las dimensiones actuales. El Sol puede considerarse como una esfera de gas con un radio actual de $R_S = 6.95 \times 10^5$ km y una densidad de masa $\rho_S = 1.4 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

La energía gravitacional de una esfera de masa M y radio R esta dada por la siguiente expresión:

$$U_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{29}$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ es la constante gravitacional.

La ley de Stefan-Boltzmann establece que la potencia por unidad de área que radía un cuerpo depende de la temperatura a la que se encuentra el cuerpo y está dada por la siguiente expresión:

$$H = \sigma T^4 \tag{30}$$

donde H es la potencia por unidad de área que emite el cuerpo negro y $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4}$ es la constante de Stefan-Boltzmann y T la temperatura.

1	**Pregunta:** Si el radio del Sol en su etapa inicial cuando se estaba formando era muy grande comparado con su radio actual, calcula el cambio de su energía gravitacional debido a está contracción. **Sugerencia:** Considera que el radio inicial del Sol era tan grande, comparado con el actual, que puede considerarse como infinito.	**3 puntos**

Solución:
La masa del Sol se puede calcular a partir de su radio y su densidad de masa:

$$M_S = \rho_S \cdot \frac{4}{3}\pi R_S^3 = \frac{4\pi \left(1.4 \times 10^3\,\mathrm{kg/m^3}\right) \left(6.95 \times 10^8\,\mathrm{m}\right)^3}{3} = 1.97 \times 10^{30}\,\mathrm{kg} \tag{31}$$

(0.5 pt) expresión de la densidad de masa.
(0.5 pt) valor numérico correcto de la masa del Sol.
A partir de la ecuación (29) se obtiene que el cambio de energía gravitacional del Sol cuando se ha comprimido desde un radio muy grande ($R \to \infty$) hasta su valor actual:

$$\begin{aligned} U_S &= U\left(R \to \infty\right) - U\left(R_S\right) = +\frac{3}{5}\frac{GM_s^2}{R_s} \\ &= \frac{3}{5}\frac{\left(6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}\right)\left(1.97 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}\right)^2}{\left(6.95 \times 10^8\,\mathrm{m}\right)} = 2.26 \times 10^{41}\,\mathrm{J} \end{aligned} \tag{32}$$

(1.5 pt) identificar el cambio de energía, energía gravitacional inicial cero.
(0.5 pt) valor numérico correcto.

Sobre la superficie terrestre se han hecho mediciones de la cantidad de energía que recibe del Sol en forma de radiación. La constante solar K que es la potencia por unidad de área recibida del Sol sobre la superficie terrestre tiene el valor:

$$K = 1366\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2}} \tag{33}$$

Por otra parte, puedes considerar que la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita circular con un periodo de 365 días.

2	**Pregunta:** Calcula el valor de la potencia total emitida por el Sol.	**3 puntos**

Solución:
Como se desconoce la distancia Tierra-Sol, se puede calcula de la siguiente manera: si la Tierra se mueve en órbita circular alrededor del Sol con un radio R_T por la fuerza de gravedad:

$$\frac{GM_S m_T}{R_T^2} = \frac{mv_T^2}{R_T}, \qquad \Rightarrow \quad \frac{R_S^3}{P_T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2} \tag{34}$$

donde $P_T = 365\,\text{días} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s} = 3.1 \times 10^7\,\text{s}$ es el periodo de la Tierra ($v_T = \omega_T R_T = 2\pi R_T / P_T$). La expresión anterior es la tercer ley de Kepler.

$$R_T = \sqrt[3]{P_T^2 \frac{GM_S}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{(3.1 \times 10^7\,\text{s})^2 \frac{(6.67 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2)\,(1.97 \times 10^{30}\,\text{kg})}{4\pi^2}} = 1.47 \times 10^{11}\,\text{m} \tag{35}$$

(1 pt) uso de la tercer ley de Kepler, o su deducción, para calcular la distancia Tierra-Sol.
(0.5 pt) valor numérico correcto de la distancia Tierra-Sol.
Conociendo la distancia Tierra-Sol, la potencia total emitida por el Sol a partir de la constante solar esta dada por:

$$P = K \times 4\pi R_T^2 = 1366\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \times 4\pi \left(1.5 \times 10^{11}\,\text{m}\right)^2 = 3.86 \times 10^{26}\,\text{W} \tag{36}$$

(1 pt) expresión correcta para calcular la potencial total emitida por el Sol.
(0.5 pt) valor numérico correcto.

3	**Pregunta:** Considerando que la energía que radía el Sol se debe solamente a la contracción gravitacional, y suponiendo que que la energía por unidad de tiempo que ha estado radiando desde su inició es constante, calcula la edad del Sol y exprésala en años (terrestres).	**2 puntos**

Solución:
La edad del Sol se puede estimar a partir de la potencia total que emite el Sol

$$\begin{aligned} \text{Edad Sol} &= \frac{\text{energía gravitacional Sol}}{\text{potencia emitida del Sol}} = \frac{U_S}{P} \\ &= \frac{2.26\times10^{41}\,\mathrm{J}}{3.86\times10^{26}\,\mathrm{W}} = 5.85\times10^{14}\,\mathrm{s}\left(\frac{\text{años}}{365\times24\times60\times60\,\mathrm{s}}\right) \\ &= 1.86\times10^{7}\,\text{años} \approx 18\,\text{millones de años} \end{aligned} \tag{37}$$

(1.5 pt) expresión para estimar la edad del Sol.
(0.5 pt) valor numérico correcto.

4	**Pregunta:** Si el Sol se considera como un cuerpo negro, estima la temperatura del Sol.	**2 puntos**

Solución:
A partir de la ley de Stefan-Boltzmann se puede calcular la temperatura del Sol y de la potencia total emitida del Sol (inciso 2):

$$H = \frac{\text{potencia total emitida del Sol}}{\text{superficie del Sol}} = \frac{P}{4\pi R_S^2} = \sigma T^4, \qquad \Rightarrow \quad T^4 = \frac{P}{4\pi\sigma R_S^2} \tag{38}$$

(1.5 pt) uso de la ley de Stefan-Boltzmann.

$$T = \left(\frac{3.86\times10^{26}\,\mathrm{W}}{4\pi\,(5.67\times10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4})\,(6.95\times10^{8}\,\mathrm{m})^2}\right)^{1/4} = 5783.03\,\mathrm{K} \tag{39}$$

(0.5 pt) valor numérico correcto.