Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2012

Examen para Nivel Medio Superior

Primera Etapa

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. ¿Cuantas cadenas de cinco caracteres se pueden hacer usando dos letras y tres dígitos (sin repetir alguna letra o número) de la siguiente forma LLDDD?

a) $27^2 10^2$ b) 27*26*10*9*8 c) $27^2 10^3$ d) $27^3 10^2$

Problema 2. ¿Cuántas cadenas de cinco caracteres se pueden hacer usando tres letras y dos dígitos de la siguiente forma LLLDD?

a) $27^2 * 10^2$ b) 27*26*25*10*9 c) $27^3 * 10^2$ d) $27^2 * 10^3$

Problema 3. ¿Cuántas cadenas de cuatro dígitos se pueden formar?

a) 10^4 b) 10*9*8*7 c) $10^2 * 9 * 8$ d) Una infinidad

Problema 4. ¿Cuántas cadenas de cuatro dígitos se pueden formar, si debe haber al menos dos 4?

a) 10^4 b) 10*9*8*7 c) 600 d) $10^4/2$

Problema 5. ¿Cuántas cadenas de cuatro dígitos se pueden formar, si el primero debe ser impar?

a) 10^4 b) $10^4/2$ c) $5 * 10^3$ d) $10^4/5$

Problema 6. ¿Cuántos números menores o iguales que 2000 son divisibles por 9?
a) 200 b)221 c) 222 d) 223

Problema 7. ¿Cuántos números menores o iguales que 2000 son divisibles por 3, pero no por 5 ?
a) 531 b) 532 c) 533 d) 534

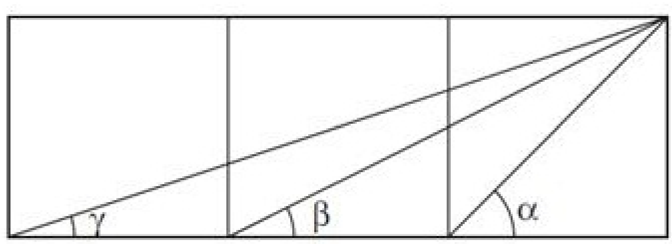
Problema 8. ¿Cuántos números menores o iguales que 2000 nos son divisibles por 3?
a) 131 b) 132 c) 133 d) 134

Problema 9. ¿Cuántas maneras hay de repartir 20 chocolates a un grupo de 6 niños?
a) $\binom{20}{6}$ b) 20*19*18*17*16*15 c) 20^6 d) 6^{20}

Problema 10. ¿De cuantas formas puedo elegir tres números impares del 1 al 100?
a) 3^3 b) 5^3 c) 3^5 d) $\binom{50}{3}$

Problema 11. En un reclusorio hay 78 prisioneros. Si se sabe que se van a fugar cuatro de ellos en cuatro diferentes días ¿De cuantas formas puede pasar esto?
a) 78^4 b) 4^{78} c) 78*77*76 d) 78!/74!

Problema 12. Considere la siguiente figura.



¿Cuál de las siguientes expresiones relaciona la medida de los ángulos?

a) $m\angle\beta + m\angle\gamma < m\angle\alpha$ b) $m\angle\beta + m\angle\gamma > m\angle\alpha$
c) $m\angle\beta + m\angle\gamma = m\angle\alpha$ d) $m\angle\beta + m\angle\alpha = m\angle\gamma$

Problema 13. ¿Qué valor de x satisface la siguiente ecuación?

$$2\ln x = \ln 2 + \ln(2+\sqrt{2}) + \ln\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)$$

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$

Problema 14. ¿Cuál es el valor de la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{sen^3\theta\ d\theta}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\ cos\ \theta}}$?

a) $\dfrac{1}{15a^3b^3}[2(a-b)^3(a^2+3ab+b^2)-\sqrt{a^2+b^2}(2a^4-11a^2b^2+2b^4)]$

b) $\dfrac{1}{15a^3b^3}[2(a-b)^3(a+b)^2-\sqrt{a^2+b^2}(2a^4-11a^2b^2+2b^4)]$

c) $\dfrac{1}{15a^2b^2}[2(a-b)^3(a^2+ab+b^2)-\sqrt{a^2+b^2}(2a^4-11a^2b^2+2b^4)]$

d) $\dfrac{1}{15a^2b^2}[2(a-b)^3(a^2+3ab+b^2)-\sqrt{a^2+b^2}(a^4-11a^2b^2+b^4)]$

Problema 15. ¿Cuántas palabras diferentes se pueden formar con las letras $A, A, A, I, I, N, N, N, N, D, D$?

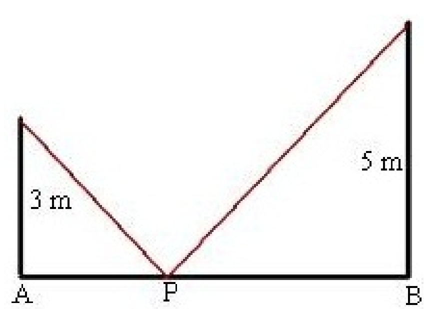
a) 3!2!4!2! b) 11!-3!2!4!2! c) 11!/3!2!4!2! d) 3!2!4!2!/11!

Problema 16. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $0 < b \leq a$. Cuál de las siguientes desigualdades es cierta.

a) $\ln\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a-b}{a} \leq \dfrac{a+b}{b}$ b) $\dfrac{a-b}{a} \leq \dfrac{a+b}{b} \leq \ln\dfrac{a}{b}$

c) $\dfrac{a-b}{a} \leq \ln\dfrac{b}{a} \leq \dfrac{a+b}{b}$ d) $\dfrac{a-b}{a} \leq \ln\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a+b}{b}$

Problema 17. La distancia entre dos postes es de 10 metros, como se muestra en la siguiente figura.



La longitud de cada poste es de 3 y 5 metros. A manera de soporte, un cable que une la parte superior de los dos postes se sujeta a un punto en el piso, localizado sobre la línea que une los dos postes. Con respecto al punto A donde debe situarse el punto P de manera que la longitud del cable sea el mínimo.

a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{15}{2}$ d) $\frac{15}{4}$

Problema 18. ¿Qué tipo de triángulo es posible construir con lados cuyas longitudes sean:2,4,6?

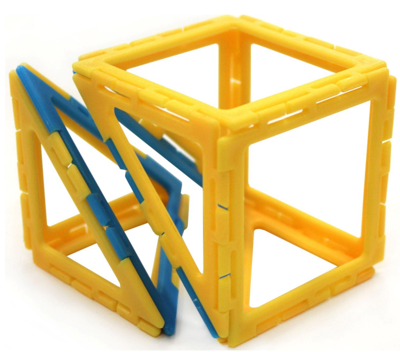
a) Equilatero b) Isósceles c) Escaleno d) Ni uno

Problema 19. Se quiere recubrir un área de 625 cm^2 utilizando simultáneamente cuadrados de 4 cm y 5 cm sin que se traslapen. Cuál de los siguientes enunciados es la solución al problema.

a) Tiene infinidad de soluciones b) No tiene solución

c) Tiene solución única d) Tiene dos soluciones

Problema 20. Considere un cubo de lado uno, se realiza un corte que pasa por tres de sus vértices tal como se muestra en la siguiente figura.



¿Cuántos cortes adicionales con esta característica se pueden hacer en el cubo? Después de realizar los cortes se genera un poliedro ¿Cuál es su volumen?

a) 1 corte y el volumen es $\sqrt{3}$ b) 1 corte y el volumen es $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) 3 cortes y el volumen es $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) 3 cortes y el volumen es $\frac{1}{3}$

Problema 21. Todos los puntos racionales (x, y) del círculo $x^2 + y^2 = 1$ están dados por:

a) $(x,y) = \left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2}, \dfrac{2m}{1+m^2}\right)$ b) $(x,y) = \left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2}, -\dfrac{2m}{1+m^2}\right)$

c) $(x,y) = \left(\dfrac{1-2m^2}{1+m^2}, \dfrac{2m}{1+m^2}\right)$ d) $(x,y) = \left(\dfrac{1-m^2}{1+m^2}, \dfrac{m}{1+m^2}\right)$

Donde m recorre todos los números racionales.

Problema 22. Considere tres enteros positivos a, b, c tales que $a + b > c$. Se tiene la ecuación $ax + by = c$, cuál de los siguientes enunciados es válido para la ecuación:

a) Tiene infinidad de soluciones enteras b) No tiene soluciones enteras

c) Sólo tiene soluciones enteras positivas d) Tiene un número finito de soluciones enteras

Problema 23. Se tiene un tablero cuadrado, este se perfora para representar fracciones utilizando pija y ligas. Las fracciones se representan en forma lineal y en forma de área, y estas son medios, tercios, cuartos y así sucesivamente hasta un décimos. ¿Cuántas perforaciones tiene el tablero?

a) 373 b) 469 c) 753 d) 1089

Problema 24. Hay dos rectas que pasan por el punto $(4, 1)$ y forman triángulos de área $\dfrac{32}{3}$ en los cuadrantes II y IV. ¿Cuáles son sus pendientes?

a) $m = \dfrac{4 \pm 11\sqrt{7}}{12}$ b) $m = \dfrac{11 \pm 4\sqrt{7}}{12}$ c) $m = \dfrac{4 \pm 7\sqrt{11}}{12}$ d) $m = \dfrac{11 \pm 4\sqrt{7}}{12}$

Problema 25. Dado el triángulo ΔABC y el triángulo ΔDEF ambos de mismo perímetro (12), y se sabe que el triángulos ΔABC es rectángulo y que el triángulo ΔDEF es equilátero. ¿Cuál tiene mayor área?

a) ΔABC b) ΔDEF c) Igual d) No se sabe