Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2013

Examen para Nivel Medio Superior

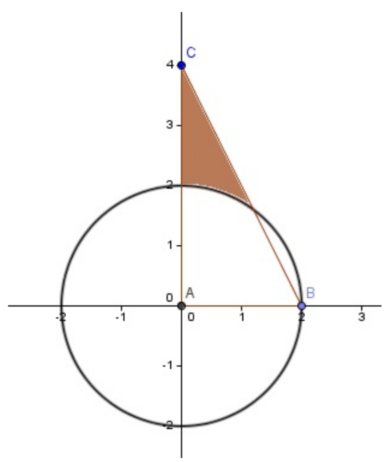
Etapa Eliminatoria

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), ipod, notebook, calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas. Cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. ¿Cuál es el valor del área sombreada?



(*a*) $4 - 4\pi$ (*b*) $4 - \pi$ (*c*) 1.13 (*d*) Ninguna de las anteriores

Problema 2. ¿Cuántas soluciones tiene $2sen(x) = x$?

(*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) 2 (*d*) 3

Problema 3. ¿Cuántos triángulos se pueden formar uniendo los vértices de un polígono regular de n lados?

(a) n (b) n^2 (c) $\binom{n}{3}$ (d) Ninguna de las anteriores

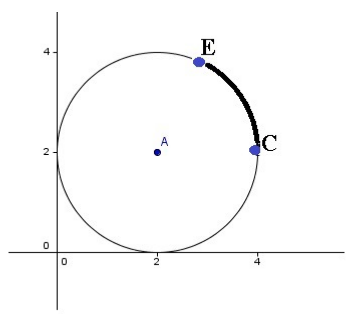
Problema 4. ¿De cuántas formas se puede ir del punto (1,2,1) al punto (3,5,7), si sólo se puede mover en las direcciones positivas de los "ejes", y en valores enteros?

(a) 11 (b) 4620 (c) 36 (d) Una infinidad

Problema 5. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $1 + \dfrac{1}{x + \frac{1}{y}} = \dfrac{4}{3}$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Mas de 2

Problema 6. ¿Cuáles deben ser las coordenadas del punto E para que la longitud de segmento $\widehat{CE}$ sea de $\frac{4}{5}\pi$? (ver figura abajo)



(a) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 2, \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + 2\right)$ (b) $\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 2, \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 2\right)$

(c) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + 2, \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + 2\right)$ (d) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} + 2, \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + 2\right)$

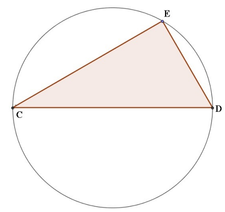
Problema 7. Una solución para $3^{4x+2} = 9$ es:

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 8. ¿Cuánto vale aproximadamente el $sen(46)$?

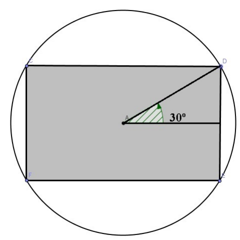
(a) 0.7193 (b) 0.7660 (c) 0.6428 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 9. ¿Cuáles son las coordenadas del punto E? Si el triángulo CDE está inscrito en el círculo con centro en el origen y radio 1, y $\overline{DE} = 1$ y $\overline{CD} = 2$.



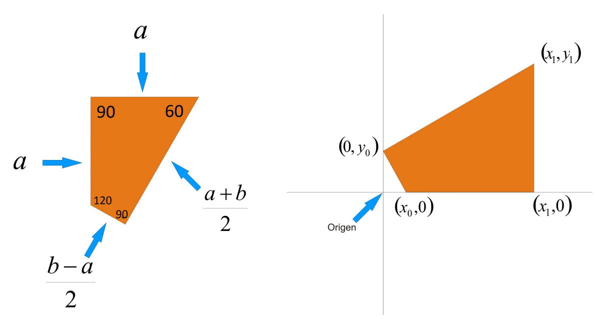
(a) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ (b) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (c) $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 10. Dado un círculo de radio uno (ver figura). ¿Cuánto mide el área del rectángulo?



(a) $\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $4\sqrt{3}$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 11. Las siguientes imágenes indican las medidas del cuadrilátero y su ubicación en el plano cartesiano. Con base en esta información, ¿cuáles son las coordenadas de los puntos $(x_0, 0), (x_1, 0), (0, y_0), (x_1, y_1)$?



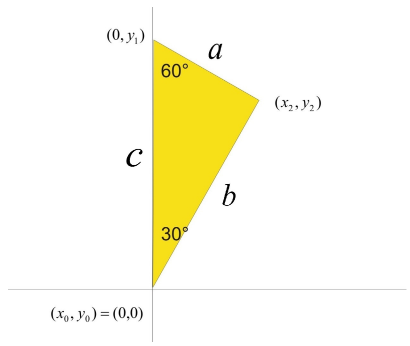
(a) $(x_0, 0) = \left(\frac{b-a}{2}, 0\right)$, $(x_1, 0) = \left(\frac{3a+b}{4}, 0\right)$, $(0, y_0) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)\right)$, $(x_1, y_1) = \left(\frac{3a+b}{4}, a\right)$

(b) $(x_0, 0) = \left(\frac{b-a}{4}, 0\right)$, $(x_1, 0) = \left(\frac{3a+b}{4}, 0\right)$, $(0, y_0) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)\right)$, $(x_1, y_1) = \left(\frac{3a+b}{4}, a\right)$

(c) $(x_0, 0) = \left(\frac{b-a}{4}, 0\right)$, $(x_1, 0) = \left(\frac{a+b}{4}, 0\right)$, $(0, y_0) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)\right)$, $(x_1, y_1) = \left(\frac{a+b}{4}, a\right)$

(d) $(x_0, 0) = \left(\frac{b-a}{8}, 0\right)$, $(x_1, 0) = \left(\frac{7a+b}{8}, 0\right)$, $(0, y_0) = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}(b-a)\right)$, $(x_1, y_1) = \left(\frac{7a+b}{8}, a\right)$

Problema 12. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos: $\{(0, y_1)$ y $(x_2, y_2)\}$ y $\{(0, 0)$ y $(x_2, y_2)\}$?



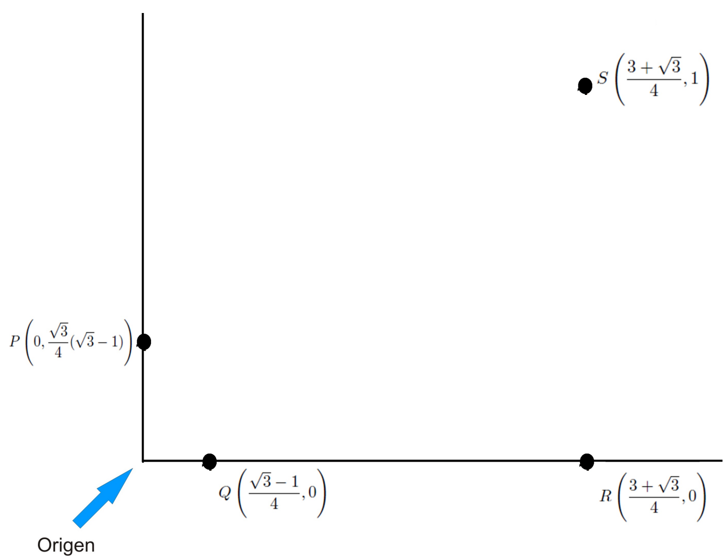
$$(a)\quad 2\sqrt{3}\,x - 2\,y = 0\,;\ \left(\frac{2c - \sqrt{3}\,b}{b}\right) x + y + c = 0$$

$$(b)\quad 2\sqrt{3}\,x - 2\,y + c = 0\,;\ \left(\frac{2c - \sqrt{3}\,b}{b}\right) x + y - c = 0$$

$$(c)\quad \sqrt{3}\,x - 2\,y = 0\,;\ \left(\frac{2c - \sqrt{3}\,b}{b}\right) x + y - c = 0$$

$$(d)\quad 2\sqrt{3}\,x - 2\,y = 0\,;\ \left(\frac{2c - \sqrt{3}\,b}{b}\right) x + y - c = 0$$

Problema 13. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen los segmentos $\overline{PS}, \overline{SR}, \overline{RQ}$ y $\overline{QP}$?



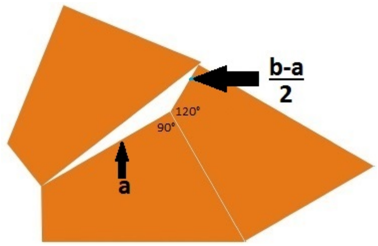
$$(a)\quad x = \frac{3+\sqrt{3}}{4};\ y = 0;\ \sqrt{3}\,x + \ y\ -\ \frac{3-\sqrt{3}}{4} = 0;\ 4(1+\sqrt{3})x - 4(3+\sqrt{3})y + 6 = 0$$

$$(b)\quad x = \frac{3+\sqrt{3}}{2};\ y = 0;\ \sqrt{3}\,x + \ y\ -\ \frac{3-\sqrt{3}}{4} = 0;\ 4(1+\sqrt{3})x - 4(3+\sqrt{3})y + 6 = 0$$

$$(c)\quad x = \frac{3+\sqrt{3}}{4};\ y = 0;\ \sqrt{3}\,x + \ y\ -\ \frac{3-\sqrt{3}}{2} = 0;\ 4(1+\sqrt{3})x - 4(3+\sqrt{3})y + 6 = 0$$

$$(d)\quad x = \frac{3+\sqrt{3}}{4};\ y = 0;\ \sqrt{3}\,x + \ y\ -\ \frac{3-\sqrt{3}}{4} = 0;\ 4(1+\sqrt{3})x - 4(3+\sqrt{3})y - 6 = 0$$

Problema 14. Considere el triángulo que se forma entre los cuadriláteros de la siguiente imágen. ¿Cuál es la medida del lado faltante?



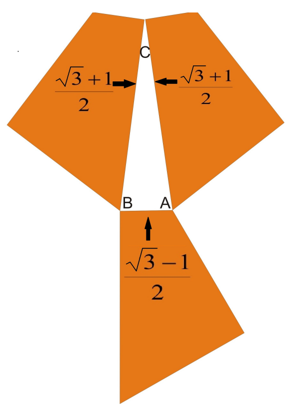
$$(a)\quad c=\sqrt{\left(\frac{5-\sqrt{3}}{4}\right)a^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)ab+\frac{b^2}{4}}$$

$$(b)\quad c=\sqrt{\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)a^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)ab+\frac{b^2}{4}}$$

$$(c)\quad c=\sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{4}\right)a^2+\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)ab+\frac{b^2}{4}}$$

$$(d)\quad c=\sqrt{\left(\frac{5-2\sqrt{3}}{4}\right)a^2+\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right)ab+\frac{b^2}{4}}$$

Problema 15. La siguiente imágen muestra un triángulo isósceles y sus dimensiones. Éste es formado por los lados del mismo cuadrilátero. Encuentra las expresiones algebraicas de los arcos cosenos de cada uno de sus ángulos.



$$(a)\quad \angle A=\angle B=\arccos\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{4}\right)\ ;\ \angle C=\arccos\left(\frac{4+6\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right)$$

$$(b)\quad \angle A=\angle B=\arccos\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)\ ;\ \angle C=\arccos\left(\frac{6+4\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right)$$

$$(c)\quad \angle A=\angle B=\arccos\left(\frac{4-2\sqrt{3}}{4}\right)\ ;\ \angle C=\arccos\left(\frac{4+6\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}\right)$$

$$(d)\quad \angle A=\angle B=\arccos\left(\frac{4+\sqrt{3}}{4}\right)\ \angle C=\arccos\left(\frac{4+6\sqrt{3}}{4+8\sqrt{3}}\right)$$

Problema 16. ¿Cuál de las siguientes expresiones corresponde a racionalizar la fracción $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$?

(a) $\dfrac{\sqrt[3]{3}+1}{2}$ $\quad$ (b) $\sqrt[3]{3}-1$ $\quad$ (c) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{2}$ $\quad$ (d) $\sqrt[3]{3}+1$

Problema 17. Considere la siguiente expresión: $a^2+b^2=7ab$. ¿Cuál de las siguientes igualdades es válida?

(a) $\log\left[\dfrac{1}{3}(a+b)\right]=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$ $\quad$ (b) $\log\left[\dfrac{1}{2}(a+b)\right]=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$

(c) $\log\left[\dfrac{1}{3}(a+b)\right]=\dfrac{1}{2}(\log a-\log b)$ $\quad$ (d) $\dfrac{1}{3}\log(a+b)=\dfrac{1}{2}(\log a+\log b)$

Problema 18. Se numeran 20 tarjetas del 1 al 20 y se toma una al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea un múltiplo de 3 ó de 7?

(a) $\dfrac{3}{100}$ $\quad$ (b) $\dfrac{3}{5}$ $\quad$ (c) $\dfrac{3}{20}$ $\quad$ (d) $\dfrac{2}{5}$

Problema 19. Considere la siguiente expresión: $a+b+c=0$. ¿Cuál de las siguientes igualdades es válida?

(a) $6(a^5+b^5+c^5)=7(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$
(b) $5(a^5+b^5+c^5)=6(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$
(c) $6(a^5+b^5+c^5)=5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$
(d) $3(a^5+b^5+c^5)=5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)$

Problema 20. Si el número $x\in\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right\}$ satisface la condición $|x-2|\leq\dfrac{1}{4}$. ¿Cuál de las siguientes expresiones es válida?

(a) $\left|\dfrac{1}{2x^2-5}-\dfrac{1}{3}\right|\leq\dfrac{68}{27}|x-2|$ $\quad$ (b) $\left|\dfrac{1}{2x^2-5}-\dfrac{1}{3}\right|\leq|x-2|$

(c) $\left|\dfrac{1}{2x^2-5}-\dfrac{1}{3}\right|\leq\dfrac{27}{68}|x-2|$ $\quad$ (d) $\left|\dfrac{1}{2x^2-5}-\dfrac{1}{3}\right|\leq\dfrac{34}{27}|x-2|$