Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2011

Examen para Nivel Medio Superior

Primera Etapa

Instrucciones: No utilizar ningún tipo de dispositivo electrónico con el que se puedan realizar operaciones. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. Al simplificar la expresión $\dfrac{2x-1}{x-1} - \dfrac{x^2}{x-1} + x$ resulta

(a) 0 (b) 1 (c) x (d) $x-1$ (e) $x+1$

Problema 2. Al simplificar la expresión $\dfrac{1}{1+\frac{x}{1+x}} - \dfrac{1}{1-\frac{x}{1-x}}$ resulta

(a) 1 (b) x (c) $\frac{x}{1-x}$ (d) $\frac{2x}{1+x}$ (e) $\frac{2x}{(1-2x)(-1-2x)}$

Problema 3. ¿Cuántas parejas de enteros x y y existen con $x \leq y$ tales que $x^2 + y^2 = 2010$?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

Problema 4. Un rectángulo con lados a y b tiene un perímetro de $28u$, si una de sus diagonales mide $10u$, entonces el área del rectángulo es,

(a) 36 (b) 40 (c) 48 (d) 84 (e) 96

Problema 5. Si $2^{x+1} = ,25$, entonces el valor de $-3x$ es

(a) -9 (b) -3 (c) 1 (d) 3 (e) 9

Problema 6. El valor exacto de la expresión $\operatorname{Sen}\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ es

(a) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ (d) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}$ (e) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}$

Problema 7. Si n y k son enteros tales que $\operatorname{Sen}\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{Cos}\left(n\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Entonces $n+k$ puede obtener el valor

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4 (e) 8

Problema 8. El punto de la recta $y = x + 5$ más cercano al punto $(0,\ -5)$ es,

(a) $(-7\,0{,}5,\ -2\,0{,}5)$ (b) $(-5, 0)$ (c) $(-2, 3)$ (d) $(-2, 3)$ (e) $(0, 5)$

Problema 9. ¿Cuál de las siguientes cantidades se puede expresar como cociente de dos enteros?

1. la cantidad de veces que cabe el radio de un círculo en su circunferencia,
2. longitud de la diagonal de un cuadrado con un lado de longitud entera,
3. altura de un triángulo equilátero con un lado de longitud entera,
4. área de un círculo con un radio entero,
5. ninguna de las anteriores.

Problema 10. El máximo común divisor de dos enteros m y n es 1, si $m < n$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones es válida?

1. no hay un primo que divida a m y n al mismo tiempo,
2. el número primo 1 divide a m y n,
3. sólo hay un primo que divide a m y n,
4. m divide a n,
5. ninguna de las anteriores.

Problema 11. A un tablero de ajedrez $\mathcal{T}$ de 8×8 se le han quitado los dos cuadrados de 1×1 que están en las esquinas de una diagonal ¿Cuál es el mayor número de fichas de dominó de 2×1 que se pueden acomodar sobre el tablero $\mathcal{T}$ sin que estas se translapen?

(a) 28 (b) 29 (c) 30 (d) 31 (e) 32

Problema 12. El área de un triángulo con vértices en los puntos $(0,1)$, $(1,4)$ y $(7,2)$ es,

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) $\frac{\sqrt{40}+\sqrt{10}}{2}$ (e) 20

Problema 13. En una escuela solo hay alumnos que nacieron entre el primero de enero de 1999 y el 31 de diciembre de 2005. ¿Cuál es el menor número de alumnos que se deben inscribir a un grupo para estar seguros que hay al menos dos alumnos que nacieron el mismo año y el mismo mes?

(a)60 (b)61 (c)72 (d)73 (e)85

Problema 14. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno contestando aleatoriamente este examen responda de manera correcta todos los ejercicios?

$(a)25^{-5}$ $(b)5^{-26}$ $(c)\dfrac{1}{25*5}$ $(d)5^{-25}$ $(e)\dfrac{25}{5^{25}}$

Problema 15. Cuántas raíces reales tiene el polinomio $f(x) = (ax^2+bx+c)(cx^2+bx+a)$ si $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$.

(a)0 (b)1 (c)2 (d)3 (e)4

Problema 16. Un triángulo equilátero tiene sus vértices sobre una circunferencia de perímetro 4π. El área del triángulo es,

$(a)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(b)\frac{\sqrt{3}}{4}$ $(c)\frac{3\sqrt{3}}{2}$ $(d)\frac{3\sqrt{3}}{4}$ $(e)\frac{\sqrt{6}}{2}$

Problema 17. Calcule el perímetro del círculo descrito por la ecuación $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 = 0$.

$(a)4\pi$ $(b)6\pi$ $(c)8\pi$ $(d)\pi$ $(e)2\pi$

Problema 18. Suponga una circunferencia que pasa por los puntos $(1,-1),(2,-2)$ y $(0,-2)$. Calcule el área de tal circunferencia.

$(a)9\pi$ $(b)4\pi$ $(c)\pi$ $(d)\frac{\pi}{4}$ $(e)2\pi$

Problema 19. Eliseo, Oscar y Abelardo tienen 12 dulces. Si Oscar le da 3 dulces a Eliseo, Abelardo le da un dulce a Oscar y Eliseo le da 2 dulces a Abelardo, entonces todos ellos quedan con la misma cantidad de dulces. ¿Cuantos dulces tenía Abelardo inicialmente?

$(a)5$ $(b)4$ $(c)1$ $(d)2$ $(e)3$

Problema 20. Suponga un pentágono convexo $ABCDE$, en el cual todos sus lados tienen la misma longitud. Si los ángulos en A y en B son rectos, ¿Cúal es la medida del ángulo en D?

$(a)90^\circ$ $(b)120^\circ$ $(c)45^\circ$ $(d)60^\circ$ $(e)75^\circ$

Problema 21. Calcule el coeficiente del termino x^5 que resulta al expandir la siguiente expresión $(x+2)^4(x+3)^3$.

$(a)321$ $(b)230$ $(c)123$ $(d)57$ $(e)85$

Problema 22. A partir de un cuadrado de lado dos, se construyen todos los cuadrados posibles que tengan al menos dos vértices en común con él. ¿Cuál será el área cubierta por todos los cuadrados construidos?

$(a)28$ $(b)26$ $(c)32$ $(d)20$ $(e)24$

Problema 23. La suma de todos los divisores de 10^5 esta dada por:

$(a)\frac{10^6-1}{9}$ $(b)\frac{2^6 5^6-1}{9}$ $(c)\frac{(2^6-1)(5^6-1)}{4}$ $(d)\frac{2^6+5^6-1}{5}$ $(e)\frac{2^6+5^6-1}{9}$

Problema 24. El área de un octágono regular de lado a esta dada por:

$(a)2\sqrt{2}a^2$ $(b)\left(4+\sqrt{2}\right)a^2$ $(c)\left(4-\sqrt{2}\right)a^2$ $(d)\left(2-2\sqrt{2}\right)a^2$ $(e)\left(2+2\sqrt{2}\right)a^2$

Problema 25. En la igualdad $2^{x+1}+2^x=3^{y+2}-3^y$ se sabe que tanto x como y son números enteros. ¿Cuál es el valor de y?

$(a)0$ $(b)1$ $(c)2$ $(d)3$ $(e)4$