



Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2014

Examen para Nivel Medio Superior

Etapa Eliminatoria

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), ipod, notebook, calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas. Cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. El (-1) es solución de $3x^2 + bx + c$ con b, c números primos. ¿Es $3c + 2b$ un número primo?

- (a) No se puede saber (b) En algunos casos (c) Si (d) No

Problema 2. Las coordenadas de los tres puntos de un triángulo son $A(0, 0)$, $B(a, a+1)$ y $C(a+4, a+3)$ ¿Cuál es el área del triángulo?

- (a) $a + 2$ (b) $a - 4$ (c) $2a + 4$ (d) $2a - 4$

Problema 3. Si $z = \cos(\theta) + 2\text{sen}(\theta)$, con $0 \leq \theta < 2\pi$ ¿Qué representa geoméricamente z ?

- (a) Círculo (b) Elipse (c) Parábola (d) Hipérbola

Problema 4. Se sabe que $\frac{3x-4}{y+15} = k$ y que $y = 3$ cuando $x = 2$. Si $y = 12$ ¿Cuál es el valor de x ?

- (a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) 8 (d) Otra respuesta.

Problema 5. Si r, s son las raíces de la ecuación $x^2 + bx + 1 = 0$, ¿Cuál es el valor $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{s^2}$?

- (a) $b^2 + 4$ (b) $b^2 - 4$ (c) $b^2 + 2$ (d) $b^2 - 2$

Problema 6. Si $x^2 + ax + b$ tiene soluciones m y n , con $m, n \neq 0$ ¿Cuál es el valor de $m + n$?

- (a) $-\frac{a}{2}$ (b) $\frac{a}{2}$ (c) $-a$ (d) a

Problema 7. ¿Cuántos números entre 100 y 999 tienen todos sus dígitos distintos ?

- (a) 576 (b) 648 (c) 720 (d) 729

Problema 8. De los números entre 10 y 99 ¿ Cuántos cumplen que el producto de sus dígitos es el doble de la suma de los dígitos?

- (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5

Problema 9. Un alambre de longitud L se corta de tal forma que se forma un cuadrado y un triángulo equilátero, de tal forma que el perímetro del cuadrado es 3 veces el perímetro del triángulo. ¿Cuál es el área del triángulo ?

- (a) $\frac{\sqrt{2}}{3}L$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}L$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}L$ (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}L$

Problema 10. Si una elipse esta centrada en el origen, su área es 8π , su eje mayor coincide con el eje X y es el doble del eje menor ¿Cuál es su ecuación general?

- (a) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (b) $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ (c) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$ (d) $4x^2 + y^2 - 4 = 0$

Problema 11. Sea $ax + by + c = 0$ la ecuación de una recta con pendiente negativa que corta al eje X en $(p, 0)$ y el eje Y en $(0, q)$ con $p, q > 0$ y $pq = 100$ ¿Cuántos posibles valores enteros pueden tomar p, q ?

- (a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9

Problema 12. La solución del siguiente sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned}\log(x) + 3\log(y) &= 7 \\ 3\log(x) - 2\log(y) &= 9\end{aligned}$$

- (a) $(e^{\frac{25}{7}}, e^{\frac{6}{7}})$ (b) $(\log(\frac{25}{7}), \log(\frac{6}{7}))$ (c) $(\log(\frac{25}{7}), e^{\frac{6}{7}})$ (d) $(e^{\frac{25}{7}}, \log(\frac{6}{7}))$

Problema 13. ¿Cuánto vale aproximadamente $\cos(29^\circ)$?

- (a) 0.8675 (b) 0.8746 (c) 0.8820 (d) 0.8906
-

Problema 14. Se sabe que una mezcla de 10 litros de leche y agua contienen 10% de agua. ¿Cuántos litros de agua deben añadirse para obtener una mezcla final que contenga el 25% de agua?

- (a) 1 (b) 2 (c) 2.5 (d) 3

Problema 15. El término 2014 de la sucesión 5, 10, 20, 40, 80, ... es:

- (a) 5×2^{2012} (b) 5×2^{2013} (c) 5×2^{2014} (d) 5×2^{2015}

Problema 16. Entre los siguientes, hay un número distinto de los demás; ¿Cuál es el número?

- (a) $2^{16}16^2$ (b) $2^{16}2^{16}$ (c) 4^84^8 (d) $(4^2)^8$

Problema 17. El cociente de 50^{50} y 25^{25} es:

- (a) 10^{25} (b) 25^{25} (c) 2×25^{25} (d) 100^{25}

Problema 18. ¿Cuál es el valor de la integral $\int \frac{xdx}{2 + \sqrt{1+x}}$?

- (a) $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2(1+x) - 6(1+x)^{1/2} - 12 \ln(2 + \sqrt{1+x}) + c$
(b) $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - (1+x) + 6(1+x)^{1/2} - 12 \ln(2 + \sqrt{1+x}) + c$
(c) $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - (1+x) + 6(1+x)^{1/2} + 12 \ln(2 + \sqrt{1+x}) + c$
(d) $\frac{2}{3}(1+x)^{3/2} - 2(1+x) + 6(1+x)^{1/2} - 12 \ln(2 + \sqrt{1+x}) + c$

Problema 19. Si $\tan(x) = u$, en el primer cuadrante ¿Cuáles son los valores del $\sen(2x)$, $\cos(2x)$ y $\tan(2x)$?

- (a) $\frac{u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{u}{1-u^2}$ (b) $\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1-u^2}$
(c) $\frac{2u}{1-u^2}, \frac{1-u^2}{1-u^2}, \frac{2u}{1+u^2}$ (d) Otra respuesta.

Problema 20. ¿Cuál es el valor de la integral $\int_0^{\pi/2} \log(\sen(x))dx$?

- (a) $-\frac{\pi}{2} \log(2)$ (b) $-\frac{\pi}{4} \log(2)$ (c) $\frac{\pi}{2} \log(2)$ (d) $\frac{\pi}{4} \log(2)$
-

Problema 21. Una curva tiene la ecuación $7x^2 - 12xy + 16y^2 = 76$. Obtener su ecuación después de que se han girado sus ejes un ángulo $\alpha = \arctan \frac{1}{2}$.

- (a) $\frac{(x')^2}{19} + \frac{(y')^2}{4} = 1$ (b) $\frac{(x')^2}{4} + \frac{(y')^2}{19} = 1$ (c) $\frac{(x')^2}{19} + \frac{(y')^2}{8} = 1$ (d) Otra respuesta.

Problema 22. Hallar la recta perpendicular a $3x + 4y = 1$ que forma con los ejes coordenados un triángulo de área 8.

- (a) $4x - 3y = \pm 4\sqrt{3}$ (b) $4x - 3y = \pm 8\sqrt{2}$ (c) $4x - 3y = \pm 8\sqrt{3}$ (d) Otra respuesta.

Problema 23. Hallar el centro y el radio de la ecuación de la circunferencia que pasa por los dos puntos de intersección de

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 1$$

$$x^2 + y^2 + 3x + 5y = 7$$

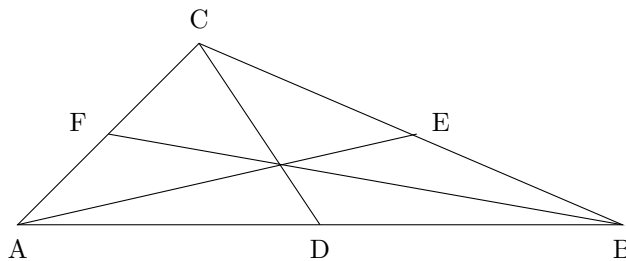
y el punto $(2, 1)$

- (a) $C\left(\frac{3}{5}, \frac{28}{5}\right)$ y $r = \frac{1}{5}\sqrt{698}$ (b) $C\left(-\frac{3}{5}, \frac{28}{5}\right)$ y $r = \frac{1}{5}\sqrt{698}$
 (c) $C\left(-\frac{3}{5}, -\frac{28}{5}\right)$ y $r = \frac{1}{5}\sqrt{698}$ (d) Otra respuesta.

Problema 24. Considere la ecuación $x^3 + y^3 = z^3 - 1$ ¿Cuál de las siguientes ternas (x, y, z) satisfacen la ecuación?

- (a) $(720, 242, 729)$ (b) $(725, 238, 732)$ (c) $(729, 244, 738)$ (d) Otra respuesta.

Problema 25. En la figura 1, AE y BF son las medianas del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ ¿Cuál es el valor de $\frac{(AE)^2 + (BF)^2}{(AB)^2}$?



- (a) $\frac{3}{4}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) $\frac{5}{4}$