

Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2011

Examen para Nivel Secundaria Primera Etapa

Instrucciones: No utilizar ningún tipo de dispositivo electrónico con el que se puedan realizar operaciones. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. Si $3\frac{2}{3} + x = 6$, donde $3\frac{2}{3}$ es una fracción mixta, ¿cuál es el valor de x ?

- (a) $3\frac{1}{2}$ (b) $2\frac{1}{3}$ (c) $1\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{1}{3}$ (e) $2\frac{1}{2}$

Problema 2. En un poblado del estado de Oaxaca se realizó una encuesta a hombres y mujeres de entre 16 y 18 años que estudian y/o trabajan. Algunos de los resultados obtenidos fueron los siguientes: Las dos terceras partes de ellos estudia y trabaja; de los que estudian y no trabajan, la cuarta parte tienen pocos recursos para continuar sus estudios y son 3501 jóvenes; y de los que no estudian y trabajan corresponde a un total de 4732 jóvenes. ¿Cuál es la población total de jóvenes encuestados.

- (a) 56206 (b) 50662 (c) 56207 (d) 5207 (e) 56208

Problema 3. Un autobús foráneo va a una velocidad de 85 kilómetros por hora. ¿Cuál es la velocidad equivalente del autobús en metros por segundo?

- (a) 23.63 m/s (b) 23.65 m/s (c) 23.68 m/s (d) 23.64 m/s (e) 23.69m/s

Problema 4. Supóngase que se tiene tres números reales a , b y c los cuales satisfacen las relaciones $a < 0 < b$ y $c < 0$ ¿Cuál de las siguientes relaciones es la correcta?

- (a) $b^2 - ac < 2b^2$ (b) $b^2 - ac = 2b^2$ (c) $b^2 - ac > 2b^2$

Problema 9. Usando la relación $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$ adecuadamente en dos ocasiones, al polinomio $f(x) = x^{2012} - 1$ lo podemos factorizar en la forma $f(x) = (x-1)(x^{1509} + x^{1006} + x^{503} + 1)g(x)$, para algún polinomio $g(x)$. ¿Cuál debe de ser el grado del polinomio $g(x)$?

- (a) 504 (b) 503 (c) 502 (d) 501 (e) 500

Problema 10. Seleccione la relación que sea la correcta, si es que la hay.

- (a) $\ln(40) = 4 \ln(2) + \ln(10) - \ln(25)$
 (b) $\ln(40) = 4 \ln(2) + \ln(25) - \ln(10)$
 (c) $\ln(40) = 5 \ln(2) + 2 \ln(5)$
 (d) $\ln(40) = 4 \ln(2) + \ln(10) - 4 \ln(5)$
 (e) Ninguna de las anteriores

Problema 11. Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la relación $f(x) = x^2$. ¿Cuál es el valor de $f(\pi - 1)$?

- (a) $\pi^2 - 1$ (b) $\pi^2 + 1$ (c) $\pi^2 - 2\pi + 1$ (d) $\pi^2 + 2\pi + 1$ (e) $\pi^2 - 2$

Problema 12. De nuevo, considere la función del problema anterior, es decir, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por la relación $f(x) = x^2$. Seleccione la relación que sea la correcta, si es que la hay.

- (a) $f((x-1)^2 - 1) = f(x-1)f(1)$
 (b) $f((x-1)^2 - 1) = f(x)f(x-2)$
 (c) $f((x-1)^2 - 1) = f(x(x-2))$
 (d) $f((x-1)^2 - 1) = f(x(x+2))$
 (e) Ninguna de las anteriores.

Problema 13. La velocidad de la luz es de $c = 300000 \text{ km/s}$. Albert Einstein estableció la famosa Teoría Especial de la Relativa la cual, entre una de sus consecuencias, dio como resultado la llamada *Paradoja de los Gemelos*, y que consiste en lo siguiente: Si un gemelo A viaja en una nave espacial a una velocidad v cercana a la velocidad de la luz, entonces el gemelo B que se queda en la Tierra observará que ha envejecido más que el gemelo

A, después de que ha retornado el gemelo A a la Tierra. La solución a esta paradoja se establece por el significado que tiene la fórmula:

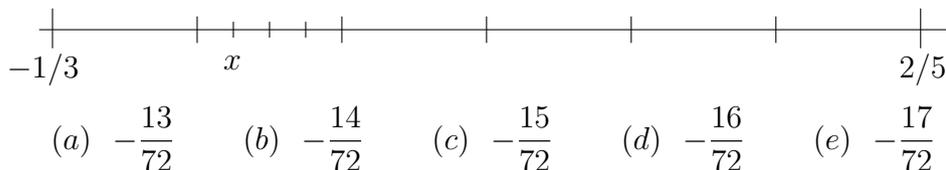
$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde t_0 y t son ciertas mediciones de intervalos de tiempo.

Supóngase que se conocen los valores de t_0 , t y, por supuesto, c . ¿Cómo se debe de calcular el valor de v ?

$$(a) \ v = c\sqrt{1 - t_0^2/t^2} \quad (b) \ v = c\sqrt{(1 - t_0^2)/t^2} \quad (c) \ v = c\sqrt{(1 - t^2)/t_0^2}$$

Problema 14. De acuerdo con la porción de recta numérica que se muestra abajo, ¿cuál es el valor de x ?



Problema 15. Considere los puntos en el plano $P = (-1, 1)$, $Q = (0, -1)$ y $R = (1, 0)$, los cuales forman un triángulo. ¿Cuál es el área del triángulo que forman?

$$(a) \ 3/2 \quad (b) \ 5/2 \quad (c) \ 7/2 \quad (d) \ 9/2 \quad (e) \ 1/2$$

Problema 16. En un triángulo rectángulo con longitud en su hipotenusa de c unidades y ángulo interior $\theta < 90^\circ$, elija la opción con la que se puede calcular el área del triángulo con los datos dados.

$$(a) \ c^2 \cos^2(\theta)/2$$

$$(b) \ c^2 \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta)/2$$

$$(c) \ c^2 \operatorname{sen}^2(\theta)/2$$

$$(d) \ c^2 \operatorname{sen}^2(\theta)/2$$

$$(e) \ -c^2 \operatorname{sen}^2(\theta)/2$$

Problema 17. Considere un triángulo rectángulo $\triangle ABC$ el cual tiene longitudes en sus catetos de 2 y 3 unidades. Sea h unidades la altura determinada sobre la hipotenusa del triángulo $\triangle ABC$. ¿Cuál es el valor de h ?

- (a) 3 unidades (b) 6 (c) $6\sqrt{13}$ unidades (d) $6\sqrt{13}/13$ unidades (e) $6/13$

Problema 18. ¿Cuál es la media aritmética de los números $1, 2, \dots, 100$?

- (a) 50 (b) 50.3 (c) 50.5 (d) 50,7 (e) 51

Problema 19. Elija la posibilidad correcta que pueda ocurrir entre dos rectas en el plano.

- (a) Tienen dos puntos de intersección.
 (b) Tienen una infinidad de puntos de intersección.
 (c) Ninguna de las anteriores.

Problema 20. Un barril cilíndrico de base circular y de 1.3 metros de altura tiene una capacidad de 1200π litros. ¿Cuál es el diámetro del barril?

- (a) $4\sqrt{39}/13$ (b) $2\sqrt{39}/13$ (c) $4\sqrt{39}/13$ (d) $6\sqrt{39}/13$ (e) $8\sqrt{39}/13$

Problema 21. Determine el valor correcto que falta en la siguiente diferencia:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad km \quad 80 \quad m \quad 15 \quad cm \quad 13 \quad mm \\
 - \\
 2 \quad km \quad 98 \quad m \quad 17 \quad cm \quad 15 \quad mm \\
 \hline
 \underline{\quad} \quad km \quad 981 \quad m \quad \underline{\quad} \quad cm \quad 8 \quad mm
 \end{array}$$

- (a) 1 (b) 8 (c) 97 (d) 123 (e) 45

Problema 22. Establezca la factorización de la expresión algebraica:

$$(x^{2/3}y^{5/3} + xy)(x^{2/3}y^{5/3} - xy) + (xy + x^{7/3}y^{4/3})(xy - x^{7/3}y^{4/3}).$$

- (a) $(x^{7/3}y^{4/3} - x^{2/3}y^{5/3})(x^{7/3}y^{4/3} + x^{2/3}y^{5/3})$
 (b) $(x^{2/3}y^{5/3} + x^{7/3}y^{4/3})(x^{2/3}y^{5/3} - x^{7/3}y^{4/3})$
 (c) $(x^{7/3}y^{5/3} + x^{2/3}y^{4/3})(x^{7/3}y^{5/3} - x^{2/3}y^{4/3})$
 (d) $(x^{7/3}y^{5/3} - x^{2/3}y^{4/3})(x^{7/3}y^{5/3} - x^{2/3}y^{4/3})$
 (e) $(x^{7/3}y^{5/3} + x^{2/3}y^{4/3})(x^{7/3}y^{5/3} + x^{2/3}y^{4/3})$

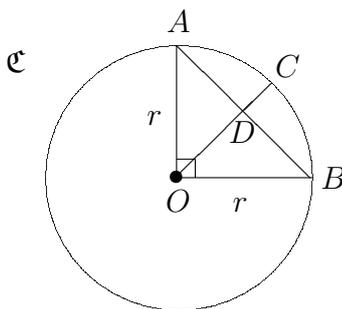
Problema 23. Se tiene un hexágono regular cuya apotema mide $3/14$ unidades. ¿Cuál es la medida de cada uno de sus lados?

- (a) $\sqrt{3}/7$ (b) $7\sqrt{3}/2$ (c) $2\sqrt{3}/7$ (d) $\sqrt{2}/3$ (e) $2\sqrt{7}/7$

Problema 24. Carlos es un obrero de familia que tiene dos hijos: Alberto y Beatríz. De su salario que recibe mensualmente, al inicio del ciclo escolar, el 60% lo usará en la compra de útiles escolares para sus hijos. Pero, como Beatríz va en la secundaria y Alberto en la primaria, Carlos gastará el 73% para Beatríz. ¿Cuál es el porcentaje de salario de Carlos que le corresponderá a su hijo Alberto en este caso?

- (a) 16.8% (b) 17.2% (c) 27% (d) 27.2% (e) 16.2%

Problema 25. De acuerdo con la figura de abajo, ¿cuál es la longitud del segmento \overline{DC} ? El segmento \overline{OD} es una de las alturas del triángulo $\triangle AOB$.



- (a) $\frac{r(1 - \sqrt{2})}{2}$ (b) $\frac{r(2 - \sqrt{2})}{2}$ (c) $\frac{r(2 + \sqrt{2})}{2}$ (d) $\frac{r(3 - \sqrt{2})}{2}$ (e) $\frac{r(3 + \sqrt{2})}{2}$