

Concurso Nacional Pierre Fermat 2012

Examen para Nivel Secundaria Primera Etapa

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. Un número entero x , con $1 \leq x < 12$, es tal que satisface la ecuación $5\frac{x}{12} = \frac{17}{2}$, donde $5\frac{x}{12}$ es la notación de un número mixto. ¿Cuál es el valor de x ?

(a) 42

(b) 44

(c) 46

(d) 48

Problema 2. Sea x un número real. ¿Cuál de las siguientes relaciones enlistadas deberá de cumplirse si x satisface las relaciones $0 < 5(1 - 2x) \leq 1$?

(a) $\frac{5}{2} \leq x < 2$

(b) $\frac{1}{2} \leq x < \frac{5}{2}$

(c) $-1 \leq x < \frac{2}{5}$

(d) $\frac{2}{5} \leq x < \frac{1}{2}$

Problema 3. El número $(2012.2012)_3$ está dado en base 3. ¿Qué número es en base 10?

(a) $59\frac{2}{3}$

(b) $59\frac{7}{9}$

(c) $59\frac{23}{27}$

(d) $59\frac{65}{81}$

Problema 4. Establezca cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas tiene por solución a la fracción $\frac{8 - \sqrt{14}}{3}$.

(a) $9x^2 - 8x + 10 = 0$

(b) $9x^2 + 8x - 10 = 0$

(c) $9x^2 - 48x + 50 = 0$

(d) $9x^2 + 48x + 50 = 0$

Problema 5. Sean a y b dos números reales tales que $b = \sqrt{2 + \sqrt{2 + a}}$, donde $a \geq -2$. ¿Cuál es el valor del número $\left(\frac{b^4 - a - 6}{4}\right)^2$?

(a) $2(a + 1)$

(b) $2a + 1$

(c) $2a$

(d) $2 + a$

Problema 6. Sea n un número entero positivo tal que n se expresa en notación decimal como $n = a_1a_0$. Si n es divisible por 12, ¿cuál de las siguientes afirmaciones entre los dígitos a_0 y a_1 de n se debe de cumplir?

(a) $a_0 - 2a_1$ es divisible por 3

(b) $a_0 - 2a_1$ es divisible por 5

(c) $a_0 - 2a_1$ es divisible por 7

(d) $a_0 - 2a_1$ es divisible por 9

Problema 7. ¿Cuál es la solución del sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = -\frac{1}{6} \quad ?$$

- (a) $\left(\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{13}, -\frac{5}{13}\right)$
- (c) $\left(-\frac{1}{13}, -\frac{5}{13}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{13}, \frac{5}{13}\right)$

Problema 8. El sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ 7x + 4y &= 1 \end{aligned}$$

admite una única solución, y dicha solución se encuentra en la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ¿Cuál es la ecuación cuadrática?

- (a) $y = 15x^2 + 10$ (b) $y = 15 - 10x^2$
- (c) $y = 10 - 15x^2$ (d) $y = 10x^2 + 15$

Problema 9. En el plano \mathbb{R}^2 , considere la recta $y = 3x + 2$. Si esta recta se traslada paralelamente sobre el eje x tres y media unidades hacia la izquierda, ¿cuál es la ecuación de la recta obtenida?

- (a) $2y = 6x + 25$ (b) $2y = 3x - 25$
- (c) $2y = 6x - 25$ (d) $2y = 3x + 25$

Problema 10. El conjunto de puntos de la recta numérica que están entre -1 y 1 , considerando a -1 y 1 , se le llama **intervalo cerrado** con extremos -1 y 1 , y es denotado por $[-1, 1]$; es decir, $[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$. Sea $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Determinar el número real $f(1 - e^{-4})$, donde e es el número que es base de la función exponencial.

- (a) $\frac{\sqrt{1 - 2e^4}}{e^4}$ (b) $\frac{\sqrt{e^4 - 2}}{e^4}$ (c) $\frac{\sqrt{2e^4 - 1}}{e^4}$ (d) $\frac{\sqrt{2 - e^4}}{e^4}$

$$(a) \quad \sin^2(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\cos(2\theta)}{2} \qquad (b) \quad \cos^2(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

$$(c) \quad \cos^2(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\cos(2\theta)}{2} \qquad (d) \quad \sin^2(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{\sin(2\theta)}{2}$$

Problema 16. ¿Cuáles de las siguientes identidades trigonométricas es la correcta?

$$(a) \quad \cos^2(\theta) + \cos^2(90^\circ - \theta) = 1 \qquad (b) \quad \cos^2(\theta) = \cos^2(90^\circ - \theta)$$

$$(c) \quad \cos^2(\theta) + \cos^2(90^\circ - \theta) = \frac{1}{2} \qquad (d) \quad \cos^2(\theta) + \cos^2(90^\circ - \theta) = -1$$

Problema 17. ¿Cuál es la ecuación de la recta en el plano xy que es tangente a la circunferencia con centro en el punto $(0, 1)$ y radio 5 unidades, la cual es paralela al eje de las x 's?

$$(a) \quad y = -4 \qquad (b) \quad x = 5 \qquad (c) \quad y = 5 \qquad (d) \quad x = -4$$

Problema 18. Sea $T_0 = \triangle ACB$ un triángulo rectángulo el cual tiene longitudes en sus catetos de 5 y 3 unidades, donde C es el vértice que soporta el ángulo recto. Por ejemplo, se puede suponer que el segmento \overline{AC} tiene longitud de 5 unidades. Considere los puntos medios de los catetos del triángulo T_0 , denotados por A_1 y B_1 , y los unimos por un segmento de recta. Notemos que si consideramos el triángulo $T_1 = \triangle A_1CB_1$, éste es un triángulo rectángulo. Ahora, con el triángulo rectángulo T_1 , hacemos el mismo procedimiento realizado con el triángulo T_0 , es decir, consideramos los puntos medios de los catetos del triángulo T_1 , denotados ahora por A_2 y B_2 , y los unimos por un segmento de recta para formar el triángulo rectángulo $T_2 = \triangle A_2CB_2$. Bajo este procedimiento, supóngase que hemos construido los triángulos T_0, T_1, \dots, T_{20} . ¿Cuál es el área del triángulo T_{20} ?

$$(a) \frac{15}{2^{38}} \qquad (b) \frac{15}{2^{39}} \qquad (c) \frac{15}{2^{40}} \qquad (d) \frac{15}{2^{41}}$$

Problema 19. Un círculo C es tal que el promedio de su perímetro de circunferencia junto con su área es $3\pi/2$. ¿Cuál debe de ser su radio?

$$(a) \frac{1}{2} \qquad (b) 1 \qquad (c) \frac{3}{2} \qquad (d) 2$$

Problema 20. Dos círculo C_1 y C_2 , de áreas A_1 y A_2 , perímetros P_1 y P_2 , y radios r_1 y r_2 respectivamente, son tales que $A_1 - A_2 = -2\pi$ y $P_1^2 + P_2^2 = 16\pi^2$. ¿Cuántas unidades deben de valer r_1 y r_2 ?

$$(a) r_1 = \sqrt{3} \text{ y } r_2 = 1 \qquad (b) r_1 = \sqrt{2} \text{ y } r_2 = 3$$

$$(c) r_1 = 1 \text{ y } r_2 = \sqrt{3} \qquad (d) r_1 = 3 \text{ y } r_2 = \sqrt{2}$$

Problema 21. Hay tres grupos de primer año en el turno matutino de una secundaria, a saber, 1.º “A”, 1.º “B” y 1.º “C”. A mediados del ciclo escolar, tres alumnos de primer año de secundaria provenientes de otras ciudades ingresan a esta secundaria, y deberán de ser distribuidos cada uno de ellos en algún grupo de tal manera que ninguno de ellos coincida con los otros. ¿De cuantas maneras estos alumnos pueden ser distribuidos?

$$(a) 3 \qquad (b) 6 \qquad (c) 9 \qquad (d) 12$$

Problema 22. Elija una de las opciones siguientes que corresponda a la ecuación del círculo en el plano que tiene centro en el punto $(1, -1)$ y radio $\sqrt{2}$ unidades.

$$(a) (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \qquad (b) (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

$$(c) (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \qquad (d) (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$$

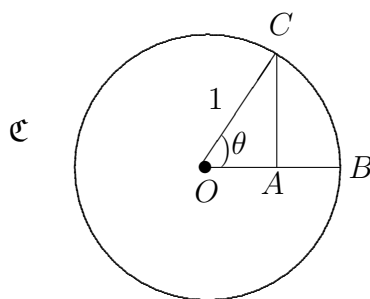
Problema 23. Una esfera de radio r unidades está inscrita en un cubo. ¿Cuál es el volumen contenido en el cubo que está fuera de esfera?

(a) $\left(\frac{3-4\pi}{3}\right)r^3$ (b) $\left(\frac{4\pi-3}{3}\right)r^3$ (c) $\left(\frac{24-4\pi}{3}\right)r^3$ (d) $\left(\frac{4\pi-12}{3}\right)r^3$

Problema 24. Una agencia de venta de autos pretendía obtener, en el año 2011, una venta de un lote de autos de un modelo específico por la cantidad de \$ 13 920 000.00, pero únicamente tuvo una venta de \$ 12 035 000.00. Si a los autos vendidos se les hubiera aumentado la cantidad de \$ 22 710.00 sobre su precio, entonces se hubiera obtenido la cantidad de dinero en venta esperada. ¿Cuál es la cantidad de autos en el lote? ¿Cuál es el costo de cada uno de los autos?

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| (a) Lote: 192 autos | (b) Lote: 120 autos |
| Costo: \$ 72 500.00 | Costo: \$ 116 000.00 |
| (c) Lote: 96 autos | (d) Lote: 48 autos |
| Costo: \$ 145 000.00 | Costo: \$ 290 000.00 |

Problema 25. De acuerdo con la figura de abajo, se tiene un círculo \mathfrak{C} , en donde el ángulo θ del triángulo $\triangle COA$ está dado en radianes. ¿Cuál es el área de la región limitada por los segmentos \overline{CA} y \overline{AB} , junto con el arco \widehat{BC} ?



- | | |
|---|---|
| (a) $\frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\cos(2\theta)}{2} \right)$ | (b) $\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2} \right)$ |
| (c) $\frac{1}{2} \left(\theta + \frac{\sin(2\theta)}{2} \right)$ | (d) $\frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\cos(2\theta)}{2} \right)$ |