



Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2013

Examen para Nivel Secundaria

Etapa Eliminatoria

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), ipod, notebook, calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas. Cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. El número $19.a43b5$ está expresado en notación decimal. ¿Cuáles deben de ser los dígitos a y b si a es raíz de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 8$ y b es la quinta parte del doble de a al ser disminuido en 3 unidades?

- (a) $a = 2$ y $b = 2$ (b) $a = 4$ y $b = 1$ (c) $a = 4$ y $b = 2$ (d) $a = 2$ y $b = 1$

Problema 2. El número 2013 no es un número primo debido a que es divisible por el número 61. ¿Cuál de las siguientes potencias debe de dividir al entero $2013^{2012} - 11^{2011}$?

- (a) 3^{2011} (b) 11^{2012} (c) 3^{2012} (d) 11^{2011}

Problema 3. Establezca cuáles son los números enteros a y b tales que $\log_2(ab) = 0$ y $\log_2(a + b) = 1$.

- (a) $a = 0 = b$ (b) $a = -1 = b$ (c) $a = 1 = b$ (d) $a = 2 = b$

Problema 4. ¿Cuál de las siguientes opciones determina el mínimo común múltiplo de los números 6, 60, 630 y 1764 ?

- (a) 36 (b) 210 (c) 1764 (d) 8820

Problema 5. ¿Cuál de los siguientes números enteros admite en su descomposición en primos exactamente tres factores distintos de números primos?

- (a) -6699 (b) 4389 (c) -5159 (d) 5929

Problema 6. Los hermanos Pedro y Juan invirtieron un dinero que habían ahorrado en la compra de una casa y un departamento. Si el precio del departamento es $\frac{4}{7}$ del precio de la casa, ¿Cuál es el precio de la casa y del departamento si Pedro y Juan tenían ahorrado \$ 1 650 000.00 ?

- (a) casa: \$ 1 050 000.00 (b) casa: \$ 1 051 000.00
depto: \$ 600 000.00 depto: \$ 599 000.00
- (c) casa: \$ 1 052 000.00 (d) casa: \$ 1 049 000.00
depto: \$ 598 000.00 depto: \$ 601 000.00

Problema 7. Sean x, y dos números reales tales que $y = \ln(\ln(x - 1) + 1)$. ¿Cuál es el valor de x ?

- (a) $e^{e^{y+1}} - 1$ (b) $e^{e^{y-1}} + 1$ (c) $e^{e^{y+1}} + 1$ (d) $e^{e^{y-1}} - 1$

Problema 8. Considere la recta L en el plano que tiene por ecuación $3x - 2y - 2 = 0$. Note que el punto $P = (2, 3)$ no pertenece a L . ¿Cuál es la ecuación de la recta paralela a la recta L que pasa por el punto P ?

- (a) $3x - y - 3 = 0$ (b) $3x - 2y = 0$
- (c) $3x - 2y - 2 = 0$ (d) $2y - 3x = 0$

Problema 9. Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene por gráfica a una recta en el plano cartesiano tal que cumple con las relaciones $f(-5\frac{2}{3}) = 2\frac{2}{3}$ y $f(3\frac{3}{4}) = 1\frac{6}{7}$, donde las expresiones $a\frac{b}{c}$ son fracciones mixtas. ¿Cómo está dada la función f ?

- (a) $f(x) = \frac{68}{791} \cdot x + \frac{5172}{2373}$ (b) $f(x) = \frac{68}{791} \cdot x - \frac{5172}{2373}$
- (c) $f(x) = -\frac{68}{791} \cdot x + \frac{5172}{2373}$ (d) $f(x) = -\frac{68}{791} \cdot x - \frac{5172}{2373}$
-

Problema 10. ¿Cuál es la pareja de puntos del plano cartesiano que no pertenece a la intersección de la circunferencia y de la elipse que tienen por ecuaciones $x^2 + y^2 = 9/4$ y $x^2/4 + y^2 = 1$, respectivamente?

- (a) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ (b) $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\right)$
 (c) $\left(-\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{21}}{6}\right)$ (d) $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{2}}\right)$

Problema 11. Encuentre los valores de x tales que $f(\ln x + 1) = -1$, donde se tiene que

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1},$$

para cada $x \in \mathbb{R}$.

- (a) $x = e$ (b) $x = 1/e$ (c) $x = -e$ (d) $x = -1/e$

Problema 12. Sea r un número real positivo. ¿Qué respuesta se tiene que dar para que se tenga la afirmación de que “el área de un círculo de radio r da como resultado un número racional”?

- (a) $r \in \mathbb{N}$ (b) $r \in \mathbb{Q}$ (c) $r \in \mathbb{I}$ (d) ninguna de las anteriores

Problema 13. ¿Cuál es el volumen de un cono circular de diámetro d y altura h ?

- (a) $V = \pi d^2 h / 12$ (b) $V = \pi d^2 h / 6$ (c) $V = \pi d^2 h / 3$ (d) $V = \pi d^2 h / 2$

Problema 14. El círculo con centro en el origen y radio 4 unidades tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 16$. ¿Cuál es la ecuación de la elipse que tiene centro en el origen, inscrito el círculo antes mencionado y teniendo su eje mayor en el eje de las x 's de longitud 10 unidades?

- (a) $16x^2 + 25y^2 = 400$ (b) $25x^2 + 16y^2 = 400$
 (c) $100x^2 + 16y^2 = 1600$ (d) $16x^2 + 100y^2 = 1600$

Problema 15. Establezca los valores reales que debe de tomar x para que se satisfaga la ecuación

$$e^{\ln x + x} = x^2.$$

- (a) $x = 1$ y $x = 2$ (b) $x = 0.5$ y $x = 1$ (c) $x = 0$ y $x = 0.5$ (d) Es vacío

Problema 16. Un recipiente cilíndrico de altura $1.5 m$ y de área de la base $0.8 m^2$ se llena de agua de manera constante. En 0.85 minutos el agua ha llegado a una altura de $0.53 m$. ¿En cuánto tiempo (en minutos y segundos) se obtiene un volumen de agua en el recipiente de $7/8$ del volumen de cilindro?

(a) 2 min. y 6.1 seg.

(b) 2 min. y 6.2 seg.

(c) 2 min. y 6.3 seg.

(d) 2 min. y 6.4 seg.

Problema 17. El valor de $\csc(7\pi/6)$ es:

(a) -2

(b) -1

(c) 1

(d) 2

Problema 18. La expresión de $19^\circ 34' 48''$ en grados decimales con aproximación a milésimas de grado es:

(a) 19.579°

(b) 19.580°

(c) 19.5802°

(d) 19.581°

Problema 19. Un helicóptero viaja de sur a norte a una velocidad constante haciendo un reconocimiento del lugar por donde pasa a baja altura. En un momento determinado, el helicóptero hace una pausa en su recorrido y se detiene a una altura de $150 m$ del lugar, y observa hacia el norte un auto rojo con un ángulo de precisión, con respecto a la vertical, de 45° ; al mismo tiempo se dirige hacia el sur y observa un auto de color azul con un ángulo de precisión de 30° . ¿Cuál es la distancia entre los dos autos?

(a) $25\sqrt{2} + 75\sqrt{3} m$

(b) $75\sqrt{2} + 25\sqrt{3} m$

(c) $75\sqrt{2} + 50\sqrt{3} m$

(d) $50\sqrt{2} + 75\sqrt{3} m$

Problema 20. Se tiene dos rectas L y L' en el plano que tienen por ecuaciones $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$, donde a y b son no ambos cero, al igual que a' y b' . ¿Cuáles son las condiciones para que las rectas L y L' sean paralelas?

(a) $b = 0$ y $b' = 0$

(b) $b \neq 0$ y $b' = 0$

(c) $b = 0$ y $b' \neq 0$

(d) $b \neq 0$ y $b' \neq 0$