Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2013

Examen para Nivel Superior

Etapa Eliminatoria

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), ipod, notebook, calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas. Cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. Sea $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Denotemos por i a la unidad imaginaria. Calcular la suma

$$\sum_{k=0}^{n-1} \exp \frac{2\pi \,\mathrm{i}\, k}{n}.$$

(a) 1 (b) 0 (c) n (d) Ninguna de las anteriores

Problema 2. Calcular el límite de la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots$ definida por su valor inicial $a_1 = 0$ y la fórmula recurrente $a_{n+1} = \sqrt[3]{3a_n + 2}$.

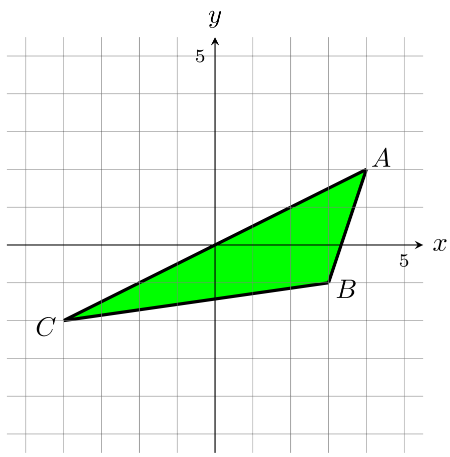
(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 3. Sean a y b dos elementos del espacio $\mathbb{R}^3$, $a \neq \mathbf{0}$. Calcular la distancia entre el punto b y la recta que pasa por el origen $\mathbf{0}$ y el punto a.

(a) $\frac{\sqrt{\|a\|^2\,\|b\|^2 - |a\cdot b|^2}}{\|a\|}$ (b) $\frac{\|a\times b\|}{\|a\|^2}$

(c) $\frac{|a\cdot b|}{\|a\|^2}\, a$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 4. Calcular el área del triángulo ABC:



(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 5. Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}.$$

(a) 0 (b) 6 (c) -6 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 6. Calcular el determinante de la matriz cuadrada de orden n cuya entrada (i,j) es igual a $i+j-1$:

$$\det\Big[i+j-1\Big]_{i,j=1}^{n}.$$

(a) $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ (b) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(c) $(-1)^n * n$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 7. Calcular el determinante de la matrix 10×10 cuyas entradas por debajo de la diagonal principal son iguales a -1, y las demás entradas son iguales a 1.

(a) 10 (b) 2^{11} (c) 2^9 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 8. La dimensión del espacio vectorial de las matrices reales antisimétricas $n \times n$ es

(a) $\frac{n(n-1)}{2}$ (b) $\frac{n(n+1)}{2}$ (c) n^2 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 9. Calcular la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 10}$.

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{9}$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 10. Denotemos por V al espacio vectorial real de todos los polinomios homogéneos de grado 10 de tres variables. Por ejemplo, el siguiente polinomio es un elemento de V:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^7 x_2 x_3^2 + 9x_1^2 x_2^4 x_3^4 - \sqrt{5}\, x_1^8 x_3^2 + x_1 x_2^7 x_3^2.$$

Calcular la dimensión de V.

(a) 66 (b) 1000 (c) 220 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 11. Denotemos por $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ al conjunto de matrices de tamaño 2×2 con entradas en los números reales y denotemos por $\mathbb{R}_2[x]$ al conjunto de polinomios de la forma $ax^2 + bx + c$, donde a, b, c son números reales. Sea $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal dada por

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d)x^2 + (b-c)x + (a-b+c-d).$$

Sean $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B} = \{x^2 + x + 1,\ x^2 + x,\ x^2\}$. La matriz que representa a T respecto a las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 12. Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ un subconjunto linealmente independiente de un espacio vectorial real V. Un conjunto linealmente independiente es:

(a) $\{\alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_2 + \alpha_3,\ \alpha_3 + \alpha_4,\ \alpha_4 + \alpha_1\}$
(b) $\{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4,\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4,\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_4,\ \alpha_2 - 2\alpha_3 + 4\alpha_4\}$
(c) $\{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4,\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4,\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4,\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4\}$
(d) Ninguna de las anteriores

Problema 13. Para $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, denotemos por A^T a la matriz transpuesta de A y por $\mathrm{Tr}(A)$ a la traza de A. Si $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es cierta?

(a) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (b) $(AB)^T = A^T B^T$

(c) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 14. El máximo común divisor de $f(x) = x^8 - 2x^6 + x^5 + 2x^2 - x - 1$ y $g(x) = x^8 + x^5 + x^4 - x - 2$ es:

(a) $x^4 - 1$ (b) $x^4 + 1$ (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 15. El polinomio $f(x) = x^9 - x^8 - 5x^7 + 9x^6 - 21x^5 + 33x^4 - 23x^3 + 35x^2 - 8x + 12$, tiene como raíz a i, la cual es de multiplicidad:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

Problema 16. El cuadrado de un número entero no puede ser de la forma:

(a) $3k$ (b) $3k + 1$ (c) $3k + 2$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 17. Sean A y B dos conjuntos, denotemos por $\wp(A)$ al conjunto potencia de A. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es cierta?

(a) Si $A \subseteq B$, entonces $\wp(A) \subseteq \wp(B)$ (b) $\wp(A \cup B) = \wp(A) \cup \wp(B)$

(c) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$ (d) Ninguna de las anteriores

Problema 18. Sean X y Y dos conjuntos no vacíos y $f : X \to Y$ una función. Dado $A \subseteq X$, denotemos por $f(A)$ a la imagen directa de A bajo f. Dado $C \subseteq Y$, denotemos por $f^{-1}(C)$ a la imagen inversa de C bajo f. Si A y B son subconjuntos de X, ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es cierta?

(a) $f^{-1}(f(A)) \subseteq A$ (b) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(c) $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ (d) Ninguna de las anteriores.

Problema 19. Se dice que una matriz A es una *matriz aurea* si satisface:

$$A = I + A^{-1}.$$

¿Cuántas matrices aureas de orden 2×2, existen ?

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Una infinidad.

Problema 20. Suponga que para ciertos números a, b, k tenemos la factorización

$$x^4 + 2x^3 + kx^2 - x + 2 = \left(x^2 + ax + 1\right)\left(x^2 + bx + 2\right).$$

¿ Cuál es el valor de k ?

(a) -2 (b) -5 (c) -12 (d) -15.