



Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2014

Examen para Nivel Superior

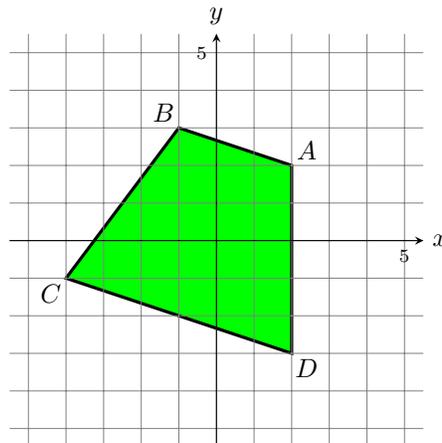
Etapla Eliminatoria

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), ipod, notebook, calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas. Cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. Calcular el área del trapecio $ABCD$:



(a) 15

(b) $\frac{45}{2}$

(c) 30

(d) Otra respuesta.

Problema 2. Calcular $f(1)$, donde $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente derivable tal que

$$f(x) = \int_0^x f(t) dt + 2.$$

- (a) e^2 (b) $2e$ (c) $2e^2$ (d) Otra respuesta.

Problema 3. Calcular la entrada $(1, 3)$ de la matriz A^{20} , donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- (a) 190 (b) 200 (c) 210 (d) Otra respuesta.

Problema 4. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con entradas reales. Calcular $f'(0)$, donde la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por la regla $f(x) = \det(I_n - xA)$.

- (a) $-\text{traza}(A)$. (b) $(-1)^{n-1} \text{traza}(A)$. (c) $-\det(A)$. (d) $(-1)^{n-1} \det(A)$.

Problema 5. Determinar para cuáles valores de los parámetros a y b converge la integral $\int_3^\infty \frac{dx}{(x-3)^a x^b}$.

- (a) $a > 1, b > 1$. (b) $a < 1, b > 1$. (c) $a > 1, a + b > 1$. (d) Otra respuesta.

Problema 6. Calcular la suma $1 + 2 \cos(x) + 2 \cos(2x) + 2 \cos(3x)$, donde $x \in (0, \pi)$.

- (a) $\frac{\cos \frac{7x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ (b) $\frac{\cos 3x}{\cos x}$ (c) $\frac{\text{sen} \frac{7x}{2}}{\text{sen} \frac{x}{2}}$ (d) $\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x}$.

Problema 7. Encuentre la integral indefinida

$$\int_{-1}^1 (x^6 + x^3) \sqrt[3]{x^3 + 2} dx.$$

- (a) 0 (b) $\frac{3}{8} \sqrt[3]{3}$ (c) $\frac{-1+3\sqrt[3]{3}}{8}$ (d) Otra respuesta.

Problema 8. El área de un trapecio regular es 2, su altura es 1. ¿Cuántas posibilidades (enteras) hay para las bases?

- (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) ∞

Problema 9. Un triángulo rectángulo tiene área 28 y perímetro 24 ¿Cuánto mide la hipotenusa?

- (a) $\sqrt{113}$ (b) 9 (c) 113 (d) Otra solución.
-

Problema 10. Hallar el valor de x si $2014^x - 2014^{x-1} = 8165122548$.

- (a) 2 (b) 3 (c) 5 (d) Otra respuesta.

Problema 11. Dado el siguiente número 123456789101112131415161718192021222324... ¿Qué dígito ocupa la posición 2014?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 9

Problema 12. Si la longitud de la diagonal de un cuadrado es $a + b$, ¿Cuánto mide el área de dicho cuadrado?

- (a) $(a + b)^2$ (b) $a^2 + b^2$ (c) $\frac{a^2+b^2}{2}$ (d) $\frac{(a+b)^2}{2}$

Problema 13. Sea $f(x) = 4^x$ ¿Cuánto es $f(x + 1) - f(x)$?

- (a) $f(x)$ (b) $2f(x)$ (c) $3f(x)$ (d) $4f(x)$

Problema 14. Sea $M(a, b)$ la intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 5$ y la recta $x - y + 2 = 0$. ¿El valor de ab es?

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 2 (d) 3

Problema 15. ¿Cuántos números reales x cumplen $\frac{a}{b} < \frac{a^2 + bx^2}{b^2 + ax^2} < 1$?

- (a) 0 (b) 1 (c) ∞ (d) Otra respuesta.

Problema 16. ¿Cuánto vale $(201420142014)^2 - (201420142013)(201420142015)$?

- (a) 1 (b) 2 (c) 2014 (d) Otra respuesta. //

Problema 17. ¿El conjunto de soluciones en \mathbb{R} de $||x| - 1| < 1$ es: ?

- (a) $(-2, 2)$ (b) $(-2, 0) \cup (0, 2)$ (c) $(-1, 1)$ (d) $(0, 2)$

Problema 18. El valor de a para que la función $f(x) = \frac{x^2 - 2ax + 2a}{x - a}$ tenga un mínimo local en $x = 0$ es:

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Otra respuesta.
-

Problema 19. En un triángulo rectángulo con ángulos agudos 15° y 75° , la longitud del lado más pequeño se denota por x . La longitud del otro cateto es:

- (a) $(\sqrt{2} + \sqrt{6})x$ (b) $(\sqrt{3} + 2)x$ (c) $5x$ (d) Otra respuesta.

Problema 20. Dados: $|\vec{u}| = 11$, $|\vec{v}| = 23$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = 30$, el valor de $|\vec{u} + \vec{v}|$ es:

- (a) 18 (b) 20 (c) 22 (d) 24

Problema 21. Si $A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$, entonces, $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n =$

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Problema 22. Si $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $f(3)$ es:

- (a) 9 (b) 18 (c) 27 (d) Otra respuesta.

Problema 23. Sea $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots + (-1)^{n-1}n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces $S_{2013} + S_{2014} =$

- (a) 0 (b) 1 (c) 1007 (d) Otra respuesta.

Problema 24. ¿Cuál es el menor intervalo que contiene los valores propios de A ? Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$,

- (a) \mathbb{R} (b) $x \geq 0$ (c) $-4 \leq x \leq 4$ (d) $0 \leq x \leq 10$

Problema 25. ¿Cuántas soluciones tiene el siguiente sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} 5x^2 + y^2 - 40x - 2y &= -76 \\ y^2 - 10y &= -25 \end{aligned}$$

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4
-