Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Octubre de 2006

Examen para nivel medio superior (Primera étapa).

Instrucciones: Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa, la cual deberá ser entregada junto con el examen.

Duración del examen: Tres horas.

Problema 1 *Se sabe que el producto de los polinomios* $3x^5+9x^4-3x+2$, $ax^7+bx^5+cx^3+d$, $2x^2-3x+1$ *es:*

$$12x^{14}+18x^{13}-66x^{12}-9x^{11}+60x^{10}-x^9-5x^7+72x^6-126x^5+45x^4-30x^3+65x^2-45x+10.$$

¿Los valores de a, b, c, d *son?*

$$a)\begin{cases} a=-1\\ b=0\\ c=3\\ d=5 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} a=0\\ b=0\\ c=-3\\ d=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad c)\begin{cases} a=2\\ b=-3\\ c=0\\ d=5 \end{cases}.$$

Problema 2 *El cociente de la división de polinomios* $\dfrac{ax^7+bx^3+cx+d}{x^3+8x-1}$ *es* $3x^4-24x^2+3x+194$ *y el residuo es* $-48x^2-1559x+186$. *¿Los valores de* a, b, c, d *son?*

$$a)\begin{cases} a=-10\\ b=-1\\ c=13\\ d=\frac{1}{3} \end{cases} \qquad b)\begin{cases} a=3\\ b=2\\ c=-10\\ d=-8 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} a=-\frac{1}{2}\\ b=0\\ c=0\\ d=-1 \end{cases}.$$

Problema 3 *¿El resultado de simplificar la siguiente expresión*

$$\frac{\sqrt{\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5}}}{\sqrt{\dfrac{2}{3}}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}}$$

es?

a) $\sqrt{5}\sqrt{2}+3$ *b*) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}-2$ *c*) 1.

Problema 4 *Un capital de* \$1000 *se invirtió durante* 5 *años a una tasa de interés anual del* 4 %. *¿Cuál es el valor actual de ese capital?*

a) \$1214.25 *b*) \$1318.37 *c*) \$1216.65 .

Problema 5 *Un capital de* \$1111.20 *se incrementó a* \$1250 *en* 3 *años. ¿A qué tasa de interés anual fue colocado?*

a) 3.45 % *b*) 3 % *c*) 4 % .

Problema 6 *Sabino y Julio fueron a la tienda a comprar lo necesario para realizar una excursión arqueológica. Ambos llevaban un total de* \$300*. Sabino gastó* $\dfrac{9}{10}$ *de su dinero y Julio* $\dfrac{4}{5}$ *del suyo. Si regresaron a casa con un total de* \$40*, ¿qué cantidad llevaba cada uno de ellos al ir a la tienda?*

a) *Sabino* \$135 *y Julio* \$165 *b*) *Sabino* \$200 *y Julio* \$100 *c*) \$150 *cada uno de ellos.*

Problema 7 *Antonio, Sergio y Francisco pueden lavar un coche en* 10 *minutos trabajando juntos. Si sólo trabajan Antonio y Sergio lo lavan en* 12 *minutos. Sergio hace el doble de trabajo que Francisco en el mismo tiempo. ¿Cuánto tardará cada uno de ellos en lavar el coche?*

a) $\begin{cases} \textit{Antonio:} & 20 \textit{ min.} \\ \textit{Sergio:} & 30 \textit{ min.} \\ \textit{Francisco:} & 60 \textit{ min.} \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} \textit{Antonio:} & 15 \textit{ min.} \\ \textit{Sergio:} & 25 \textit{ min.} \\ \textit{Francisco:} & 50 \textit{ min.} \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} \textit{Antonio:} & 23 \textit{ min.} \\ \textit{Sergio:} & 34 \textit{ min.} \\ \textit{Francisco:} & 68 \textit{ min.} \end{cases}$.

Problema 8 *La solución del sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \frac{3}{x}+\frac{5}{y}-\frac{1}{z} &= 5 \\ \frac{7}{y}+\frac{9}{z} &= 8 \\ 2x-3y \qquad &= 0 \end{aligned}$$

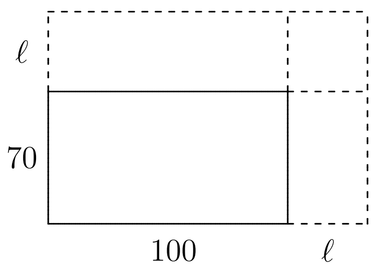
es:

a) $\begin{cases} x=1 \\ y=-4 \\ z=-\frac{5}{6} \end{cases}$ *b*) $\begin{cases} x=\frac{111}{27} \\ y=-\frac{237}{415} \\ z=-\frac{56}{65} \end{cases}$ *c*) $\begin{cases} x=\frac{105}{53} \\ y=\frac{70}{53} \\ z=-\frac{10}{3} \end{cases}$.

Problema 9 *¿Existirán dos números enteros cuya suma sea 36 y su producto sea 50?*

a) *Si* *b*) *No.*

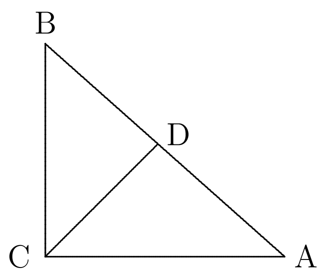
Problema 10



Una pista para patinar es de forma rectangular de $100 \times 70\, m^2$. *El dueño desea aumentar el área de la pista a* $13000\, m^2$, *añadiendo dos franjas a un lado y a un extremo de la pista como se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser el ancho* ℓ *de las franjas que deben añadirse?*

a) 21 *metros* *b*) 37 *metros* *c*) 30 *metros.*

Problema 11



En el triángulo rectángulo $\triangle$ABC, *el segmento* CD *es perpendi– cular a la hipotenusa* AB. *Si* $\overline{\mathrm{AD}} = 11$ *y* $\overline{\mathrm{BD}} = 15$, *entonces* $\overline{\mathrm{CD}}$ *tiene un valor de:*

a) $13\,u$ *b*) $17\frac{1}{2}\,u$ *c*) $\sqrt{165}\,u$.

Problema 12 *Dos lados de un triángulo son* $a = 62.48\,u$, $b = 89.72\,u$. *Uno de sus ángulos es* $\alpha = 32°16'$. *¿Cuántos triángulos con estos parámetros existen?*

a) *Ninguno* *b*) *Uno y sólo uno* *c*) *Dos.*

Problema 13 *Si se sabe que* $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$, *entonces*

a) $\operatorname{sen} 22.5° = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}$ *b*) $\operatorname{sen} 22.5° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2} - 1$ *c*) $\operatorname{sen} 22.5° = \dfrac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

Problema 14 *El piloto de un avión observa que el ángulo de depresión con el que mira a una luz en el suelo situada bajo su línea de vuelo es de* 30°. *Un minuto más tarde el ángulo de depresión a cambiado a* 45°. *Si el avión está volando horizontalmente en línea recta y a una velocidad de* 90 *millas por hora, ¿cuál es la altura a la que se encuentra volando?*

a) 2049 *millas* *b*) 2187 *millas* *c*) 1623 *millas.*

Problema 15 *Las rectas:*

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

en el plano cartesiano, son paralelas si y sólo si el sistema

$$a_1x + b_1y = -c_1$$
$$a_2x + b_2y = -c_2$$

a) *No tiene solución* *b)* *Tiene solución única* *c)* *Tiene una infinidad de soluciones.*

Problema 16 *¿Es posible encontrar una recta que pase por el punto $(1, 5)$ y forme un triángulo de área 1 con la parte positiva de los ejes coordenados?*

a) *No existe tal recta* *b)* *Existe al menos una recta que cumple lo exigido* *c)* *No sabe.*

Problema 17 *La ecuación general de la recta que pasa por los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2) del plano cartesiano es:*

a) $(a_2 - a_1)\,y + (b_2 - b_1)\,x + a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ *b)* $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

c) *Ninguna de las dos anteriores.*

Problema 18 *Las rectas:*

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

concurren en el punto (a, b) del plano cartesiano si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

a) *Es igual a cero* *b)* *Es igual a 1* *c)* *Es distinto de cero.*

Problema 19 *¿El área del triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, (a_1, b_1), (a_2, b_2) es?*

a) $\text{área} = \frac{1}{2}\,(a_2 - a_1)\,(b_2 - b_1)$ *b)* $\text{área} = \frac{1}{2}\,(a_1b_2 - a_2b_1)$ *c)* *Ninguna de las anteriores.*

Problema 20 *¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 1)$, $(0, 6)$, $(3, 0)$?*

a) $(x-4)^2+(y+6)^2=9$ *b)* $x^2+y^2-5x-7y+6=0$ *c)* *Ninguna de las anteriores.*

Problema 21 *¿Cuál es la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos lados son las rectas* $3x-4y-19=0$, $4x+3y-17=0$, $x+7=0$*?*

a) $x^2+y^2+4x-21=0$ *b)* $x^2+y^2+15x+y+6=0$ *c)* *Ninguna de las anteriores.*

Problema 22 *¿Cuántas tangentes tiene la elipse* $5x^2+2y^2-50x-4y+107=0$ *en el punto de abscisa* $x=9$*?*

a) *Dos* *b)* *Ninguna* *c)* *Solo una.*

Problema 23 *Considérese la elipse* $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$. *La circunferencia con centro en* (h,k) *y diámetro la longitud del semi–eje menor:*

a) *Pasa por los focos* *b)* *No pasa por los focos* *c)* *Pasa por los vértices.*

Problema 24 *Si el eje focal de cierta parábola forma un ángulo de* $\dfrac{\pi}{4}$ *radianes con la parte positiva del eje* X*, entonces ¿qué ángulo forma su directriz con la parte positiva del eje* X*?*

a) $128°$ *b)* $135°$ *c)* *No es posible determinarlo.*

Problema 25 *¿Cuáles son las ecuaciones de las circunferencias inscrita y circunscrita al triángulo formado por los ejes coordenados y la recta* $3x+4y-1=0$*?*

a) $\begin{cases} \textit{Inscrita:} & x^2+y^2-6x-y+14=0 \\ \textit{Circunscrita:} & x^2+y^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \textit{Inscrita:} & x^2+y^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}y-\frac{1}{144}=0 \\ \textit{Circunscrita:} & x^2+y^2-3x-4y+5=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \textit{Inscrita:} & x^2+y^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}y-\frac{1}{144}=0 \\ \textit{Circunscrita:} & x^2+y^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y=0 \end{cases}.$

Problema 26 *¿La ecuación general de la hipérbola conjugada a la hipérbola de ecuación:*

$$36x^2-16y^2+216x-160y-652=0.$$

es?

a) $4y^2 - 9x^2 - 54x + 40y - 125 = 0$

b) $14x^2 - 5y^2 - 17x + 3y - 5 = 0$

c) $y^2 - x^2 - 2x + 3y + 7 = 0$

Problema 27 *El profesor Sabino tiene 5 pantalones, 8 chalecos y 7 sacos. ¿Cuántos trajes distintos puede llevar?*

a) 200 *b*) 125 *c*) 280.

Problema 28 *¿En cuántas de las combinaciones sin repetición de las letras a, b, c, d, e tomadas tres a tres se encuentra la letra a?*

a) 10 *b*) 15 *c*) 6.

Problema 29 *¿Cuántas variedades de repiques se pueden formar con 5 de 8 campanas?*

a) 5250 *b*) 6720 *c*) 2800.

Problema 30 *Con 10 banderas de colores distintos, ¿cuántas señales diferentes pueden hacerse, bajo la condición de que el número máximo de banderas empleadas sea 4.*

a) 2000 *b*) 12725 *c*) 5860.