Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Edición 2015

Examen para nivel medio superior (Primera etapa).

Instrucciones: *No utilizar teléfono celular (éste deberá estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio electrónico en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa.*

Duración del examen: *Tres horas.*

Problema 1 En cierta escuela de ciencias, 80 alumnos están inscritos en Geometría I, 90 en Cálculo I y 55 en Álgebra I. De este total de alumnos, 32 de ellos cursan Geometría I y Cálculo I, 23 cursan Cálculo I y Álgebra I, 16 cursan Geometría I y Álgebra I y 8 se encuentran cursando las tres materias. ¿Cuál es el número total de alumnos inscritos en las tres materias?

(a) 200 (b) 225 (c) 162 (d) 175

Problema 2 Considérense los siguientes conjuntos:

$$\mathsf{A} = \{x \mid x \text{ es un número natural y } 1 \le x \le 4\}, \qquad \mathsf{B} = \left\{y \mid y = x^2 - 2x - 3\right\}.$$

¿Cuál es el producto cartesiano de A con B?

(a) $\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{(1,-4),(2,5),(3,1),(4,5)\}$

(b) $\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{(1,-4),(2,-3),(3,0),(4,5)\}$

(c) $\mathsf{A} \times \mathsf{B} = \{(1,-4),(2,1),(3,-1),(4,0)\}$

(d) Ninguna de las tres opciones precedentes

Problema 3 Para poblar la tierra, el dios Brahma, dió nacimiento a un número determinado de hijos e hijas, los cuales fueron el origen de las castas de la India. Encontrar el número de castas, sabiendo que es igual al número de hijos, que la diferencia entre el número de hijos e hijas es 1 y que la diferencia entre los cuadrados del número de hijos y de hijas es 7.

(a) 3 hijas, 4 hijos, 4 castas

(b) 10 hijas, 11 hijos, 9 castas

(c) 2 hijas, 3 hijos, 3 castas

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 4 Encontrar todas las soluciones reales del sistema:

$$(x+y)\left(x^2-y^2\right)=9$$
$$(x-y)\left(x^2+y^2\right)=5$$

(a) $x=2,\ \ y=1$

(b) $x=-1,\ \ y=-2$

(c) $x=1,\ \ y=0$

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 5 Encontrar todos los números reales r, para los cuales el polinomio cuadrático

$$p\left(x\right)=\left(r^2-1\right)^2x^2+2\left(r-1\right)x+1$$

sea siempre estrictamente positivo.

(a) Para todo r

(b) $r\geq 0$

(c) $r\geq 1$

(d) $r\geq -\dfrac{1}{4}$

Problema 6 Si $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\varphi-\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(2\varphi+\alpha\right)=\operatorname{sen}\left(\varphi+\alpha\right)+\operatorname{sen}\left(2\varphi-\alpha\right)$, encontrar $\cos\varphi$ siempre que φ se encuentre en el tercer cuadrante y que $\operatorname{sen}\alpha\neq 0$.

(a) $\cos\varphi=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$

(b) $\cos\varphi=\dfrac{1+\sqrt{3}}{5}$

(c) $\cos\varphi=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

(d) $\cos\varphi=\dfrac{-2+\sqrt{3}}{5}$

Problema 7 ¿Cuál es el valor máximo de $y=\log_2^4\left(x\right)+\log_2^2\left(x\right)\cdot\log_2\left(\dfrac{8}{x}\right)$ y en qué valor de la variable x se alcanza?

(a) 81 en x tal que $\log_2(x) = 3$

(b) 81 en $x = 3$

(c) 76 en $x = \sqrt{3}$

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 8 Si T es un triángulo con vértices el origen, P (x_1, y_1) y Q (x_2, y_2), entonces su área esta dada por la fórmula:

(a) $\textit{área}(\mathsf{T}) = \frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1)$

(b) $\textit{área}(\mathsf{T}) = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$

(c) $\textit{área}(\mathsf{T}) = \frac{1}{2}(x_2y_2 - x_1y_1)$

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 9 Sean P (x_1, y_1), Q (x_2, y_2) y R (x_3, y_3) tres puntos en el plano cartesiano y sea

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

(a) Si $\Delta > 0$, entonces los tres puntos son los vértices de un triángulo y su área es igual a Δ.

(b) Si $\Delta = 0$, entonces los tres puntos son colineales.

(c) Si $\Delta < 0$, entonces los tres puntos forman un triángulo y su área es $-\Delta$.

(d) Ninguna de las tres proposiciones anteriores es verdadera.

Problema 10 Encontrar los valores del parámetro k de manera que las tres rectas:

$$x + y + 1 = 0$$
$$kx - y + 3 = 0$$
$$4x - 5y + k = 0$$

sean concurrentes.

(a) $k = -3 \pm 2\sqrt{10}$ (b) -1 y 1 (c) 0 (d) Para ningún k

Problema 11 ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo formado por las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $3x + 4y - 1 = 0$?

(a) $\left(x-\frac{1}{8}\right)^2+\left(y-\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$

(b) $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{12}$

(c) $\left(x-\frac{1}{12}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{144}$

(d) Ninguna de las tres opciones precedentes

Problema 12 Si a es un número real, ¿Cuál es el desarrollo de $\left(a+\sqrt{a^2-1}\,\right)^7+\left(a-\sqrt{a^2-1}\,\right)^7$?

(a) $2a\,(64a^6-112a^4+56a^2-7)$

(b) $64a^7-112a^5+56a^3-7$

(c) $64a^7-128a^5+64a^3-8$

(d) Ninguna de las tres opciones precedentes

Problema 13 Encontrar los valores de a y de b de manera que el polinomio $x^3-ax^2+2x-3b$ sea divisible por el polinomio x^2-3x+2.

(a) $a=-1$, $b=1$ (b) $a=3$, $b=0$ (c) $a=3$, $b=2$ (d) a y b no existen

Problema 14 Considérese el siguiente límite

$$\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7}{x-a}.$$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7}{x-a}$ no existe.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7}{x-a}=+\infty.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^7-a^7}{x-a}=7a^6.$

(d) Ninguna de las tres proposiciones anteriores es verdadera.

Problema 15 Considérese el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right).$$

¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$ no existe

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=+\infty$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)=1$

(d) Ninguna de las tres proposiciones anteriores es verdadera

Problema 16 Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{x}$.

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x}$ no existe

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} = +\infty$

(c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x} = 3$

(d) Ninguna de las tres opciones precedentes

Problema 17 Considérese la función con regla de correspondencia $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

(a) La función f tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$ y como asíntota vertical la recta $x = -1$.

(b) La función f no tiene asíntotas.

(c) La función f tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$ y como asíntota vertical la recta $x = 1$.

(d) La función f tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$ y no tiene asíntotas verticales.

Problema 18 ¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$?

(a) $(-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$

(b) $(-\infty, -5) \cup [3, +\infty)$

(c) $(-\infty, -5] \cup (3, +\infty)$

(d) $[-5, 3]$

Problema 19 Considérense la función $f(x) = x^2 + 2x - 15$ y el punto $x_0 = 3$ perteneciente al dominio de f. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

(a) f es derivable en $x_0 = 3$ y $f'(3) = 8$.

(b) f tiene recta tangente en $x_0 = 3$ y su ecuación es $y - 8x + 24 = 0$.

(c) f tiene integral definida en $[-5, 3]$ y su valor es $-\dfrac{256}{3}$.

(d) Ninguna de las proposiciones anteriores es verdadera.

Problema 20 Encontrar un punto P$(x, 0)$ en el eje de las abscisas del plano cartesiano de manera que la suma de las distancias de P a los puntos A$(8, 8)$, B$(3, 2)$ del plano cartesiano, sea mínima.

(a) P$(4, 0)$ (b) P$(0, 0)$ (c) P$(-1, 0)$ (d) P$(3, 0)$

Problema 21 Encontrar todos los puntos sobre el gráfico de la función $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, cuya distancia al origen sea mínima.

(a) $\left(\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt[3]{2}, \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right)$

(b) $\left(\sqrt[6]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ y $\left(-\sqrt[6]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

(c) $\left(-\sqrt[6]{2}, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 22 ¿Cuál es la expresión en fracciones parciales de la función racional:

$$\frac{x^5+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}\,?$$

(a) $x-2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1/2}{x+1}+\dfrac{1/2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}$

(b) $x-2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1/4}{x+1}+\dfrac{1/8}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}$

(c) $x-2-\dfrac{1}{x}-\dfrac{1/4}{x^4+1}+\dfrac{5}{x+2}$

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 23 Resolver la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}\,dx.$

(a) $\frac{1}{2}x^2-2x-\ln\dfrac{(x+2)^5\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

(b) $\frac{1}{2}x^2-2x+\ln\dfrac{(x+2)^5\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

(c) $\frac{1}{2}x^2+2x+\ln\dfrac{(x+2)^5\sqrt{x^2-1}}{x}+c$

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 24 Resolver la integral indefinida $\displaystyle\int x\arctan x\,dx.$

(a) $\dfrac{x^2+1}{2}\arctan x+\frac{1}{2}x+c$

(b) $\dfrac{x^2-1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+c$

(c) $\dfrac{x^2+1}{2}\arctan x-\frac{1}{2}x+c$

(d) Ninguna de las opciones precedentes

Problema 25 ¿Cuál es el valor del área encerrada por la parábola $y=1-2x-x^2$ y la cuerda que une los puntos $(-1,-2)$, $(2,1)$?

(a) 4.75

(b) $\dfrac{5}{2}$

(c) $\dfrac{9}{2}$

(d) $\dfrac{15}{4}$