20° Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Edición 2016

Examen para nivel medio superior (Primera etapa).

Instrucciones: *No utilizar teléfono celular (éste deberá estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio electrónico en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa.*

Duración del examen: *Tres horas.*

Problema 1 Considérense los conjuntos

$$\mathsf{D} = \{\text{números primos}\}, \qquad \mathsf{E} = \{1, 2, 3, \ldots, 20\};$$

$$\mathsf{F} = \{\text{números naturales con al menos uno de sus dígitos igual a 3}\}.$$

¿Cuál de los siguientes conjuntos es $\mathsf{D} \cap \mathsf{E} \cap \mathsf{F}$?

(a) $\{3, 13\}$ (b) $\varnothing$ (c) $\{13\}$ (d) $\{3\}$

Problema 2 En el plano cartesiano, sean E una elipse y H una hipérbola. Elija la combinación que considere correcta para el probable número de puntos que se encuentren en $\mathsf{E} \cap \mathsf{H}$.

(a) $\mathsf{E} \cap \mathsf{H}$ consta de exactamente cuatro puntos.

(b) $\mathsf{E} \cap \mathsf{H}$ puede tener a lo más cuatro puntos.

(c) $\mathsf{E} \cap \mathsf{H}$ puede constar de 2 o de 4 puntos.

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 3 Sea α un número real estrictamente positivo. Identificar el lugar geométrico de los puntos en el plano cartesiano representado por la ecuación $x^2 + y^2 = 2\alpha\,(x + y)$.

(a) La familia de circunferencias con centro en la recta $y = x$ y radio α.

(b) La familia de circunferencias con centro en la recta $y = 2\alpha x$ y radio 2α.

(c) La familia de circunferencias con centro en la parte positiva de la recta $y = x$ y tangentes a los ejes coordenados.

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 4 Sean a y b dos números reales estrictamente positivos. ¿Cuál es la ecuación general de la elipse inscrita al rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$ y (a, b)?

(a) $x^2 + y^2 + ax + by - \dfrac{1}{16}\,(a^2b^2 - 4a^2 - 4b^2) = 0.$

(b) $x^2 + y^2 - ax - by - \dfrac{1}{16}\,(a^2b^2 - 4a^2 - 4b^2) = 0.$

(c) $\dfrac{\left(x - \frac{1}{2}a\right)^2}{\frac{1}{4}a^2} + \dfrac{\left(y - \frac{1}{2}b\right)^2}{\frac{1}{4}b^2} = 1.$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 5 ¿Cuál es el valor del área de un triángulo equilátero de lado a?

(a) a^2 (b) $\dfrac{1}{3}a^2$ (c) $a^2\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{a}$

Problema 6 Utilizando un triángulo adecuado, encontrar explícitamente los valores de $\cos\dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$ y $\tan\dfrac{\pi}{6}$.

(a) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$. (b) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

(c) $\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$, $\tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{3}\sqrt{3}$. (d) Ninguna de las opciones anteriores

Problema 7 Si a un rectángulo de lados x y 15, se le quita un cuadrado de lado x el valor del área de la figura resultante es 36. ¿Cuál es la ecuación que modela a este problema?

(a) $x^2 - 15x - 36 = 0$

(b) $x^2 - 15x + 36 = 0$

(c) $x^2 + 15x + 36 = 0$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 8 Sean R_1 un rectángulo de lados $x+3$ y $x+5$ y R_2 un rectángulo de lados $x+7$ y $x+2$. Si ambos rectángulos tienen la misma área, Elija la opción que considere correcta.

(a) La ecuación que modela el problema es lineal y por tanto sólo existe exactamente un valor posible para x.

(b) La ecuación que modela el problema es cuadrática y existen dos valores posibles para x.

(c) La ecuación que modela el problema es cuadrática sin soluciones reales, por lo que el problema no tiene soluciones reales.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Problema 9 Sea Q un cuadrilátero cíclico. ¿La proposición: *"La suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero* Q *es igual a la suma de dos rectos"* es equivalente a?:

(a) Los ángulos opuestos de Q son complementarios.

(b) Los lados opuestos de Q tienen la misma longitud.

(c) Los ángulos opuestos de Q son suplementarios.

(d) Ninguna de las proposiciones anteriores.

Problema 10 Considérese la siguiente proposición: *"Por tres puntos distintos del plano cartesiano pasa una y sólo una circunferencia."* Elija la opción que considere correcta.

(a) La proposición es falsa.

(b) La proposición es verdadera sólo si los puntos no son colineales.

(c) La proposición es verdadera.

(d) Las tres opciones anteriores son falsas.

Problema 11 Utilizando los valores del seno y del coseno de los ángulos de $45°$ y de $30°$, encuentre el valor explícito de $\operatorname{sen} 15°$.

(a) $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\sqrt{2}}{4}$

(b) $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{3}}{4}$

(c) $\operatorname{sen} 15° = \dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)\sqrt{2}}{4}$

(d) Ninguna de las tres opciones anteriores.

Problema 12 Sean $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ las ecuaciones cartesianas de dos rectas distintas en el plano. Si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

entonces elija la opción que considere correcta.

(a) Las rectas son perpendiculares.

(b) Ambas ecuaciones representan a la misma recta.

(c) Las rectas son paralelas.

(d) Ninguna de las tres opciones es verdadera.

Problema 13 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Elija la proposición que considere correcta.

(a) La función f es continua y derivable en todo su dominio, el cual es $\mathbb{R} - \{0\}$.

(b) La función f es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

(c) La función f es discontinua únicamente en 0.

(d) Ninguna de las tres opciones anteriores es verdadera.

Problema 14 Un estudiante se compromete con el tiránico profesor Sabino a presentarle diariamente la solución de 5 problemas. El estudiante recibe $\$7.50$ por cada solución correcta y por el contrario, debe abonar $\$6.00$ al susodicho profesor por cada problema no resuelto o por cada solución incorrecta. Al termino de 15 días, el estudiante tiene un saldo a su favor de $\$225$, ¿Cuántos problemas resolvió correctamente el estudiante?

(a) 37 problemas (b) 50 problemas (c) 18 problemas (d) 11 problemas

Problema 15 Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y a un punto de $\mathbb{R}$ en el cual la función es derivable. Elija la proposición que considere verdadera.

(a) La función f es discontinua en a.

(b) La función f tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ y su ecuación es:

$$y - f(a) + f'(a)(x - a) = 0.$$

(c) La función f tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ y su ecuación es:

$$y - f(a) - f'(a)(x - a) = 0.$$

(d) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.

Problema 16 ¿Para aproximar mediante diferenciales el número $\sqrt{4.15}$, qué función, qué punto y qué diferencial utilizaría?

(a) $f(x) = x^2, \;\; a = 2, \;\; dx = 0.15$

(b) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; a = 4.1, \;\; dx = 0.05$

(c) $f(x) = \sqrt{x}, \;\; a = 4, \;\; dx = 0.15$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 17 ¿Cuál es la aproximación mediante diferenciales del número $\sqrt{4.15}$?

(a) $\dfrac{815}{400}$

(b) 2.0375

(c) 2.03715

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 18 ¿Para qué subconjunto de $\mathbb{R}$ está definida la función $f(x) = \sqrt{3x^2 - 12}$?

(a) $[2, +\infty)$

(b) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

(c) $\varnothing$

(d) Ninguna de las opciones anteriores

Problema 19 Sean a un número real mayor o igual que 0 y n cualquier número natural. ¿Cuál es el valor de $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$?

(a) $n a^{n-1}$

(b) $+\infty$

(c) 0

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 20 Considérese la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{3-x}{2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$. Calcular $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

(a) El límite no existe

(b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

(c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 21 Determinar el número y la naturaleza de los puntos críticos de la función dada por $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.

(a) 3 puntos críticos: dos máximos y un mínimo.

(b) 3 puntos críticos: dos mínimos y un máximo.

(c) 3 puntos críticos: un máximo, un mínimo y un punto de inflexión.

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 22 Considérese la función dada por $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Elija la proposición que considere correcta.

(a) La función f tiene un punto crítico en $x = 0$.

(b) La función f no tiene puntos críticos, pero tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

(c) La función f es siempre continua y decreciente.

(d) Ninguna de las proposiciones anteriores es verdadera.

Problema 23 ¿Cuál es la solución de la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{x-1}{x+1}\,dx$?

(a) $x + 4\ln(x+1) + c$

(b) $2x - \ln(x+1)^4 + c$

(c) $x - 2\ln(x+1) + c$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 24 ¿Cuál es la solución de la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 9x + 22}$?

(a) $\ln\left(\dfrac{x-11}{x+2}\right)^{13} + c$

(b) $\dfrac{1}{13}\ln\left(\dfrac{x-11}{x+2}\right) + c$

(c) $\dfrac{1}{13}\ln\left(\dfrac{x-2}{x+11}\right) + c$

(d) Ninguna de las opciones anteriores.

Problema 25 Si la integral definida, expresa el valor de un área y las áreas nunca son negativas, ¿entonces por qué $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^3 dx = -\frac{15}{4}$?

(a) Porque al dividir adecuadamente el intervalo de integración, la integral resulta ser una suma algebraica de números positivos.

(b) Porque las funciones negativas tienen integral negativa.

(c) Porque en este caso, la función es impar.

(d) Ninguna de las opciones anteriores es verdadera.