



# XXII CONCURSO NACIONAL DE MATEMÁTICAS PIERRE FERMAT

2018

## Examen para Nivel Bachillerato (Eliminatoria)

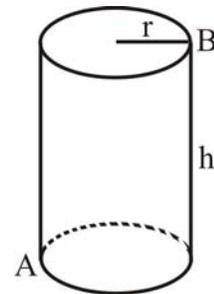
### INSTRUCCIONES

No utilizar teléfono celular (deberá estar apagado), calculadora o cualquier otro medio electrónico con el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas. Cualquier pregunta deberá estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentaran en la hoja de respuestas anexa.

**DURACIÓN DEL EXAMEN:** Tres horas.

- El polinomio  $p(x) = x^5 + bx + c$  tiene coeficientes enteros y  $p(3) = 0$ . Entonces  $c$  no puede ser
  - 10
  - 12
  - 15
  - 36
- Supongamos que  $S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + (-1)^{n-1}n$ , siendo  $n$  un entero positivo. Entonces  $S_{2017} + S_{2018}$  es:
  - 1
  - 0
  - 1
  - 2
- Una araña camina sobre la superficie de un cilindro. Va del punto A al punto B. Si  $r = 2$  y  $h = 10$ , ¿cuál es la longitud del camino más corto?

- $2\sqrt{10}$
- $2\sqrt{\pi^2 + 10^2}$
- 7
- $2\sqrt{\pi^2 + 25}$



- Los enteros positivos  $x$  e  $y$  no tienen divisores comunes mayores que 1, y se cumple que  $xy = 350$ . ¿Cuál es el menor valor posible para  $x + y$ ?

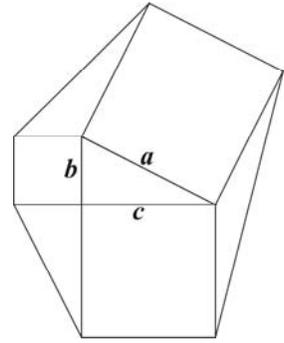
- 30
- 35
- 39
- 56

- El número  $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2000} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2000}$  es igual a :

- $\frac{5^{2000}-1}{4}$
- $\frac{5^{2000}+1}{4}$
- $4^{1000}$
- 1

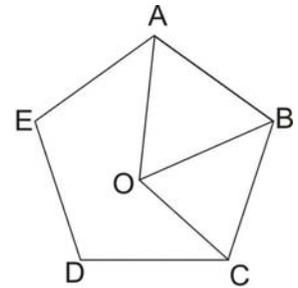
6. En la figura, el triángulo central es recto, sobre sus lados hay cuadrados, se obtiene un hexágono uniendo los vértices exteriores. El área del hexágono vale :

- a)  $bc + \frac{5}{2}(b^2 + c^2)$     b)  $2bc + \frac{3}{2}(b^2 + c^2)$   
 c)  $\frac{3}{2}bc + 2(b^2 + c^2)$     d)  $2(bc + b^2 + c^2)$



7. En la figura, ABCDE es un pentágono regular y ABO es un triángulo equilátero. ¿Cuál es la medida del ángulo  $\angle BCO$ ?

- a)  $66^\circ$     b)  $54^\circ$     c)  $60^\circ$     d)  $45^\circ$

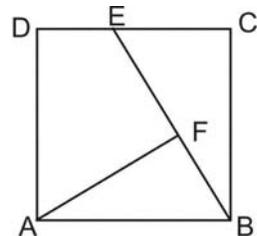


8. María tiene una caja rectangular llena de terrones de azúcar. Se come la capa superior, que tiene 77 terrones. Luego se come una de las capas laterales, lo que supone 55 terrones. Finalmente se come la capa frontal. ¿Cuántos terrones quedan en la caja?

- a) 203    b) 300    c) 295    d) 256

9. ABCD es un cuadrado. Hallar la longitud del segmento EC si AF es 4 y FB es 3

- a) 3,80    b) 3,75    c) 3,85    d) 3,65



10. Se consideran los puntos  $A(-2, -1)$  y  $B(2, 2)$  en el plano cartesiano. Si  $C(x, 1)$  es un punto tal que  $|AC| + |CB|$  es mínima, entonces x vale

- a)  $5/4$     b)  $3/4$     c)  $2/3$     d) 1

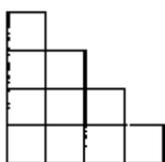
11. ¿Cuál es el resto de la división de  $3^{20} \cdot 5^{30} - 2$  por 15 ?

- a) 2    b) 13    c) 5    d) 13

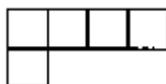
12. Si  $\sin(x) + \cos(x) = m$  entonces  $\sin^4(x) + \cos^4(x)$  es igual a

- a)  $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$     b)  $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$     c)  $\frac{1 - (1-m^2)^2}{2}$     d)  $m^4 + 1$

13. Las tres figuras muestran el mismo "castillo" construido con cubos de madera, visto de frente, desde arriba y desde la izquierda. ¿Cuántos cubos se han utilizado para construir el "castillo"?



Visto de frente



Visto desde arriba



Visto desde la izq.

- a) 10      b) 11      c) 12      d) 13

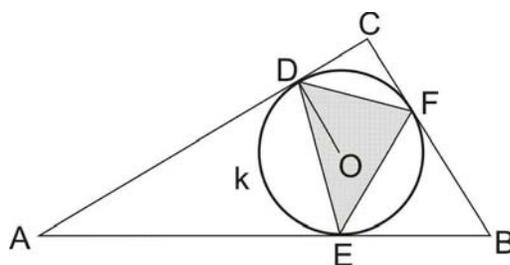
14. El Conejo de Alicia en el País de las Maravillas siempre miente de Lunes a Miércoles y dice la verdad el resto de la semana. ¿Qué día puede haber dicho

- (1) "Mentí ayer"  
(2) "Mentiré mañana"

- a) Lunes      b) Martes      c) Jueves      d) Esta situación es imposible

15. La figura muestra el triángulo ABC y el círculo k de centro O inscrito en el triángulo. D,E,F son los puntos donde el círculo es tangente a los lados del triángulo. Si  $\angle DAE = 32^\circ$ , ¿cuánto mide  $\angle DFE$ ?

- a)  $46^\circ$       b)  $58^\circ$       c)  $74^\circ$       d) no se puede determinar



16. Marcos quiere comprar un celular, que cuesta \$5400. Cuando se le pregunta por sus ahorros, dice: *Si tuviera un quinto más de lo que tengo, me faltaría la cuarta parte menos de lo que me falta para poder pagarlo.* ¿Cuánto dinero tiene Marcos?

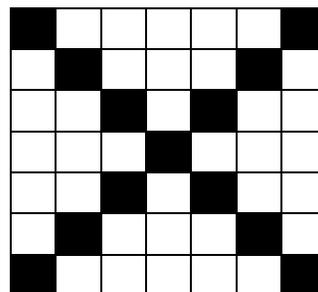
- a) \$600      b) \$1200      c) \$2400      d) \$3000

17. Consideremos un cubo de lado 2 y una esfera con centro en el centro del cubo. Sea K el conjunto de los puntos de la superficie del cubo y G el conjunto de los puntos de la superficie de la esfera. El conjunto  $K \cap G$  consta de seis circunferencias si y sólo si el radio r de la esfera verifica las desigualdades

- a)  $1 < r \leq \sqrt{2}$       b)  $1 \leq r < \sqrt{2}$       c)  $r \leq \sqrt{2}$       d)  $\sqrt{2} \leq r < \sqrt{3}$

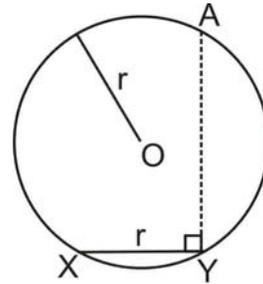
18. s es un entero impar. En un cuadrado de lado s, similar al de la figura, que tiene lado 7, los cuadrados de lado 1 de las diagonales están coloreados. ¿Cuánto vale el área blanca?

- a)  $s^2 + 1 - 2s$       b)  $s^2 + 4 - 4s$       c)  $2s^2 + 1 - 4s$       d)  $s^2 - 1 - 2s$



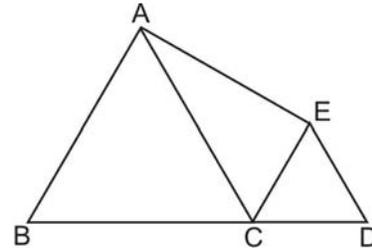
19. El ángulo  $\angle XAY$  de la figura adjunta vale ?

- a)  $22 \frac{1}{2}^\circ$       b)  $30^\circ$       c)  $45^\circ$       d)  $60^\circ$



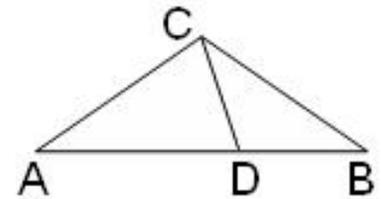
20. En la figura los dos triángulos equiláteros  $ABC$  y  $ECD$  tienen lados de longitudes 2 y 1, respectivamente. El área del cuadrilátero  $ABCE$  es :

- a)  $\frac{5\sqrt{3}}{3}$       b)  $\frac{4+5\sqrt{3}}{4}$       c)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$       d)  $\frac{6+\sqrt{3}}{4}$



21. Se da el triángulo isósceles  $ABC$  ( $CA = CB$ ). Se marca el punto  $D$  sobre el lado  $AB$  de modo que  $AD = AC$  y  $DB = DC$  (ver la figura). Hallar la medida del ángulo  $ACB$ .

- a)  $98^\circ$       b)  $100^\circ$       c)  $104^\circ$       d)  $108^\circ$

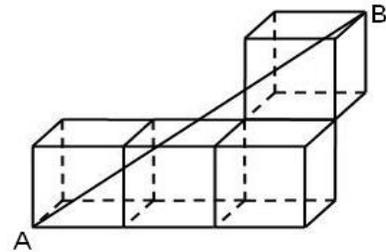


22. El máximo valor de  $f(x) = |5 \sin x - 3|$  para  $x \in \mathbb{R}$  es

- a) 8      b) 3      c)  $\pi$       d)  $5\pi$

23. Cada uno de los cubos de la figura tiene arista de longitud 1. ¿Cuál es la longitud del segmento  $AB$ ?

- a)  $\sqrt{17}$       b) 7      c)  $\sqrt{13}$       d)  $\sqrt{14}$



24. Hallar el valor de la expresión  $x^2 + y^2 + z^2$ , si  $x + y + z = 1$  y  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ .

- a) 0      b) 1      c) 2      d) Imposible saberlo

25. El padre de María es 4 años mayor que la madre, y la media de las edades de sus padres es 39. La media de las edades de María y de su padre es 23. ¿Cuántos años tiene María?

- a) 5 años      b) 7 años      c) 11 años      d) 13 años