Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2014

Examen para Nivel Secundaria

Etapa Eliminatoria

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), ipod, notebook, calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas. Cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. ¿Cuáles de los tres conjuntos de dos números $\{a_1, b_1\}$, $\{a_2, b_2\}$ y $\{a_3, b_3\}$ satisfacen las desigualdades $-5.3961 < a_1 < a_3 < a_2 < c < b_3 < b_2 < b_1 < -5.3955$, donde $c = -5.396096$.

(a) $\{-5.396097\ ,\ -5.39609553\}$, $\{-5.3960963\ ,\ -5.39609552\}$
y $\{-5.3960965\ ,\ -5.3960956\}$

(b) $\{-5.396097\ ,\ -5.39609552\}$, $\{-5.3960963\ ,\ -5.396095561\}$
y $\{-5.3960965\ ,\ -5.39609556\}$

(c) $\{-5.396097\ ,\ -5.39609552\}$, $\{-5.3960963\ ,\ -5.39609553\}$
y $\{-5.3960965\ ,\ -5.3960956\}$

(d) $\{-5.396097\ ,\ -5.39609552\}$, $\{-5.3960965\ ,\ -5.39609553\}$
y $\{-5.3960963\ ,\ -5.3960956\}$

Problema 2. ¿Cuál número racional se encuentra entre los números $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$?

(a) $3+\sqrt{2}$ (b) $4.\overline{8783}$ (c) $3+2\sqrt{3}$ (d) 4.877

Problema 3. Considere los números reales construídos de la siguiente manera:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1 \text{ y } a_n = \frac{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}{2} \text{ para cada } n \geq 3.$$

¿Cuál es el valor de a_8?

(a) $\frac{19}{4}$ (b) $\frac{19}{8}$ (c) $-\frac{19}{8}$ (d) $-\frac{19}{4}$

Problema 4. ¿Cuál de las siguientes opciones determina la simplificación de la expresión numérica

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{4} - \left(\frac{7}{6} - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{7}{5} + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right)^2\right) ?$$

(a) $\frac{421}{400}$ (b) $-\frac{421}{400}$ (c) $\frac{431}{400}$ (d) $-\frac{431}{400}$

Problema 5. ¿Cuál de los siguientes números es el resultado de hacer el producto de exactamente un factor primo de 2013 con uno de 2014?

(a) 26 (b) 55 (c) 209 (d) 243

Problema 6. Todo número entero se puede expresar en la forma $4n + r$ donde n es un número entero y el valor de r es $0,\ 1,\ 2$ ó 3. Para un número de la forma $4k - 23$, con k número entero, ¿cuál es el valor de su r?

(a) $r = 0$ (b) $r = 1$ (c) $r = 2$ (d) $r = 3$

Problema 7. ¿De qué forma son los números enteros positivos que se pueden expresar como una diferencia de cuadrados de dos números consecutivos?

(a) $-2n-1$ (b) $-2n$ (c) $2n$ (d) $2n+1$

Problema 8. Dé la factorización de la expresión algebraica

$$12x^{3/2}y^{11/5} - 27x^{17/10}y^2 + 8x^2y^{17/10} - 18x^{11/5}y^{3/2}.$$

(*a*) $(2x^{1/2}y^{3/5} - 3x^{3/5}y^{1/2})(3x^{1/2}y - 2xy^{1/2})(2x^{1/2}y^{3/5} + 3x^{3/5}y^{1/2})$
(*b*) $-(2x^{1/2}y^{3/5} - 3x^{3/5}y^{1/2})(3x^{1/2}y - 2xy^{1/2})(2x^{1/2}y^{3/5} + 3x^{3/5}y^{1/2})$
(*c*) $(2x^{1/2}y^{3/5} - 3x^{3/5}y^{1/2})(3x^{1/2}y + 2xy^{1/2})(2x^{1/2}y^{3/5} + 3x^{3/5}y^{1/2})$
(*d*) $-(2x^{1/2}y^{3/5} - 3x^{3/5}y^{1/2})(3x^{1/2}y + 2xy^{1/2})(2x^{1/2}y^{3/5} + 3x^{3/5}y^{1/2})$

Problema 9. Dé el resultado de hacer la suma de la siguiente expresión algebraica

$$\frac{x+2}{(2x+1)(x-1)} - \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)} + \frac{x-1}{(x+2)(2x+1)}$$

(*a*) $-\dfrac{2}{2x+1}$ (*b*) $-\dfrac{2}{2x+1}$ (*c*) $-\dfrac{2}{2x+1}$ (*d*) $-\dfrac{2}{2x+1}$

Problema 10. Un ángulo θ satisface la ecuación $\cos(2\theta - 70°) = \sqrt{3}/2$. ¿Cuál es el valor de θ?

(*a*) 30° (*b*) 45° (*c*) 50° (*d*) 60°

Problema 11. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo interior θ, donde $0 < \theta < 90°$, con su cateto adyacente de 3 u (u = unidades de longitud). ¿Cuál es la longitud del otro cateto del triángulo?

(*a*) $\dfrac{3\text{sen}(90° - \theta)}{\text{sen}(\theta)}\ u$ (*b*) $\dfrac{3\cos(90° - \theta)}{\text{sen}(\theta)}\ u$

(*c*) $\dfrac{3\text{sen}(90° - \theta)}{\cos(\theta)}\ u$ (*d*) $\dfrac{3\cos(90° - \theta)}{\cos(\theta)}\ u$

Problema 12. ¿Existe un triángulo rectángulo cuyo perímetro sea $2(5 + \sqrt{17})$ u y área 8 u^2? Si su respuesta es **"no"**, dé como respuesta el inciso "(*a*)"; en caso contrario dé contestación a la siguiente pregunta: ¿Cuáles son las dimensiones de los catetos del triángulo rectángulo?

(*a*)	No
	Longitud de catetos
(*b*)	4 u y 4 u
(*c*)	2 u y 8 u
(*d*)	1 u y 16 u

Problema 13. Usando la ecuación $\operatorname{sen}^2(\cos^3(2x)) = \ln(2x) - \cos^2(\cos^3(2x))$, dé el valor aproximado de x.

(*a*) $x \approx 1.35$ (*b*) $x \approx 2.35$ (*c*) $x \approx 2.71$ (*d*) $x \approx 3.35$

Problema 14. Elija la relación que dé como consecuencia que la ecuación cuadrática $(1+a)x^2 + (1-a)x + a = 0$ tiene al menos una solución real.

(*a*) $3a^2 + 6a - 1 \leq 0$ (*b*) $3a^2 - 6a + 1 \leq 0$

(*c*) $3a^2 - 6a - 1 \leq 0$ (*d*) $3a^2 + 6a + 1 \leq 0$

Problema 15. Un grupo 2° "*A*" de estudiantes de una secundaria del Distrito Federal, se preparan para realizar un viaje de prácticas a las Pirámides de Teotihuacan. Por desgracia, no todos los estudiantes del grupo podrán realizar este viaje. Del total de estudiantes del grupo, sólo el 93 % podrá realizar dicha escursión. Los estudiantes a viajar se organizan en tres subgrupos: el 24 % de ellos llevarán las tortas de jamón, el 43 % llevará los refrescos y 7 estudiantes llevarán la fruta. Si 2 alumnos fueron los que no pudieron ir de viaje de prácticas, de manera respectiva dé la solución a las siguientes preguntas: ¿Cuál es la cantidad de alumnos que tiene el grupo? ¿Qué porcentaje del grupo 2° "*A*" corresponde la cantidad de 7 alumnos? ¿Cuántos alumnos que irán de viaje de prácticas están libres de llevar algún producto alimenticio?

(*a*) 29 alumnos, 25 %, 2 alumnos (*b*) 30 alumnos, 24 %, 1 alumno
(*c*) 29 alumnos, 25 %, 2 alumnos (*d*) 29 alumnos, 24 %, 2 alumnos

Problema 16. Se analizaron algunos precios de productos que venden dos cadenas de centros comerciales, A y B, en la Ciudad de México, para obtener la diferencia en pesos y la diferencia en porcentaje. En particular, el Aguacate Hass es vendido por la cadena comercial A en \$ 19.47 el kilogramo, mientras que la cadena comercial B lo vende en \$ 37.63. ¿Cuál es la diferencia en pesos y la diferencia en porcentaje para este producto?

	Diferencia en pesos	Diferencia en porcentaje
(*a*)	\$18.16	193.27 %
(*b*)	\$18.16	93.27 %
(*c*)	\$18.16	194.28 %
(*d*)	\$18.16	94.28 %

Problema 17. Considere los conjuntos $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$ y $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}$. ¿Cuál es el conjunto $A \cap B$?

(a) $\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \, , \, \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \right\}$

(b) $\left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \, , \, \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \right\}$

(c) $\left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \, , \, \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \right\}$

(d) $\left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \, , \, \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \, , \, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \right) \right\}$

Problema 18. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x/2 - 1/3$ para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es el conjunto de elementos $x \in \mathbb{R}$ que tiene la propiedad de que $f(x) > \sqrt{5}/2$?

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2/9 + \sqrt{5}/3\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2/3 + \sqrt{5}/9\}$

(c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2/9 + \sqrt{5}/3\}$

(d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2/3 - \sqrt{5}/9\}$

Problema 19. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas tiene por solución a los números irracionales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$?

(a) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

(b) $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$

(c) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x - \sqrt{6} = 0$

(d) $x^2 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} = 0$

Problema 20. Dados los puntos en el plano $P = (1 + \sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $Q = (-\sqrt{3}, 1 - \sqrt{2})$ establezca cuáles son las unidades que determinan el cuadrado de la distancia entre ellos.

(a) $4(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})\ u$

(b) $4(3 + \sqrt{6})\ u$

(c) $4(3 - \sqrt{6})\ u$

(d) $4(3 - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6})\ u$

Problema 21. Una circunferencia C en el plano está centrada en el origen pasando por el punto de coordenadas $P = (0, 2)$. Si L es una recta del plano que contiene al punto P intersectando a C en exactamente dicho punto, ¿cuál es la ecuación algebraica de la circunferencia C y de la recta L?

	Ecuación de la circunferencia C	Ecuación de la recta L
(a)	$x^2 + y^2 = 4$	$x = 0$
(b)	$x^2 + y^2 = 2$	$x = 0$
(c)	$x^2 + y^2 = 4$	$y = 2$
(d)	$x^2 + y^2 = 2$	$y = 2$

Problema 22. Los puntos en el plano $P = (0, 2)$ y $Q = (1, 0)$ son puntos que pertenecen a una circunferencia C centrada en el punto $(-3/2, 0)$. ¿Cuál es la longitud del radio de la circunferencia?

(a) $2/5\ u$ (b) $25/4\ u$ (c) $4/25\ u$ (d) $5/2\ u$

Problema 23. Supóngase que L y L' son dos rectas en el plano que tienen por ecuación $2x + by + 3 = 0$ y $ax - 3y - 1 = 0$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a \neq 0 \neq b$. ¿Qué condición deben de cumplir a y b para que las rectas L y L' sean paralelas?

(a) $ab = -6$ (b) $ab = 6$ (c) $b = -2a/3$ (d) $b = 2a/3$

Problema 24. Considere los triángulos rectángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ABC'$, con ángulo recto en el vértice A y longitud del segmento $\overline{AC}$ mayor que el del segmento $\overline{AC'}$. ¿Cuál es la fórmula que determina el área del triángulo $\triangle CBC'$?

(a) Área $= |\overline{AC}||\overline{CC'}|/2$ (b) Área $= |\overline{AB}||\overline{CC'}|/2$

(c) Área $= |\overline{AC'}||\overline{CC'}|/2$ (d) Área $= |\overline{BC}||\overline{BC'}|/2$

donde $|\overline{BC}|$ representa la longitud del segmento $\overline{BC}$.

Problema 25. Considere el segmento $\overline{AB}$ en el plano que tiene por puntos extremos $A = (-1, 0)$ y $B = (1, 3)$. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que contiene al punto medio del segmento $\overline{AB}$?

(a) $x^2 + y^2 = 1/4$ (b) $x^2 + y^2 = 1$

(c) $x^2 + y^2 = 9/4$ (d) $x^2 + y^2 = 4$

donde $|\overline{BC}|$ representa la longitud del segmento $\overline{BC}$.