Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Edición 2015

Examen para nivel secundaria (Primera etapa).

Instrucciones: *No utilizar teléfono celular (éste deberá estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio electrónico en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa.*

Duración del examen: *Tres horas.*

Problema 1 Establezca el número más grande de las siguientes expresiones:

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (b) π (c) 3.14618 (d) $3+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{25}+\dfrac{3}{500}+\dfrac{3}{10000}$

Problema 2 Notemos que las relaciones $1 \leq 2 < 3$ y $1 < 2 < 3$ son ciertas, pero la más exacta o la más precisa es la segunda. Sean a, b dos números reales tales que $0 < a \leq 1$ y $-1 \leq b < 1$. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es la más precisa?

(a) $-1 \leq a+b \leq 2$ (b) $-1 < a+b < 2$ (c) $-1 \leq a+b < 2$ (d) $-1 < a+b \leq 2$

Problema 3 ¿Cuál es el número natural n que cumple la relación $0 < 1/n < \pi/95.7$?

(a) $n = 28$ (b) $n = 29$ (c) $n = 30$ (d) $n = 27$

Problema 4 Usando la fórmula $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$, determine el valor de $\cos(\theta/2)$ sabiendo que $\cos(\theta) = 3/7$ para un ángulo $0 < \theta < \pi/2$.

$(a)\quad \pm\dfrac{\sqrt{35}}{7}$

$(c)\quad -\dfrac{\sqrt{35}}{7}$

$(b)\quad \dfrac{\sqrt{35}}{7}$

(d) Ninguna de las anteriores.

Problema 5 El número 2015 es el producto de tres números primos distintos. El doble de uno de ellos es la diferencia de los otros dos. ¿Cuál es este número primo?

(a) 13 (b) 17 (c) 29 (d) 37

Problema 6 Determine la expresión algebraica que corresponda al producto

$$\left(3x^3y^2 - 2xy + 1\right)\left(2x^2y - xy^2\right).$$

$(a)\quad 6x^5y^3+3x^4y^4-4x^3y^2-2x^2y^3+2x^2y-xy^2$

$(c)\quad 6x^5y^3-3x^4y^4-4x^3y^2+2x^2y^3-2x^2y+xy^2$

$(b)\quad 6x^5y^3-3x^4y^4-4x^3y^2+2x^2y^3+2x^2y-xy^2$

$(d)\quad 6x^5y^3-3x^4y^4+4x^3y^2+2x^2y^3+2x^2y+xy^2$

Problema 7 Determine la factorización de la expresión algebraica

$$3a^4b^4 - a^3b^3 + a^3b - 6a^2b^4 + 2ab^3 - 2ab.$$

$(a)\quad (3a^2b^3 + ab^2 - a)\,(a^2b - 2b)$

$(c)\quad (3a^2b^3 - ab^2 - a)\,(a^2b + 2b)$

$(b)\quad (3a^2b^3 - ab^2 + a)\,(a^2b + 2b)$

$(d)\quad (3a^2b^3 - ab^2 + a)\,(a^2b - 2b)$

Problema 8 Elija la expresión algebraica que determine el despeje de x deducida de la ecuación

$$a^2(x-1) + b^2(x+1) = 0.$$

$(a)\quad x = \dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ $(b)\quad x = \dfrac{a+b}{a-b}$ $(c)\quad x = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ $(d)\quad x = \dfrac{a-b}{a+b}$

Problema 9 ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a la recta que pasa por los puntos del plano cartesiano $\mathsf{P}_1 = (-2, 1)$ y $\mathsf{P}_2 = (3, 4)$?

(a) $5x + 3y - 7 = 0$ (b) $5x - 3y + 7 = 0$ (c) $5x + 3y + 7 = 0$ (d) $5x - 3y - 7 = 0$

Problema 10 Dos números reales x e y satisfacen que $y > x$, su punto medio es $(1+\sqrt{2})/3$ y la distancia entre ellos es de $7/2$. ¿Cuáles son los valores de x e y?

$(a)\quad x = \frac{25}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad y = -\frac{17}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

$(b)\quad x = \frac{17}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad y = -\frac{25}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

$(c)\quad x = -\frac{25}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad y = \frac{17}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

$(d)\quad x = -\frac{17}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad y = \frac{25}{12} + \frac{\sqrt{2}}{3}$

Problema 11 Sea x un número real. Determine cuál de las siguientes relaciones se debe de cumplir para que sea cierta la relación $\sqrt{1-x} \ \geq \ \sqrt{1+2x}$.

$(a)\quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$(b)\quad -1 \leq x \leq \frac{1}{2}$

$(c)\quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$

$(d)\quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Problema 12 ¿Cuáles son los valores reales que debe de tomar x para que se cumpla la igualdad

$$2^{x(x+1)/2} = 3^{\ln 2}\,?$$

$(a)\quad -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\ln(2)}}{2}$

$(b)\quad -\frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\ln(3)}}{2}$

$(c)\quad \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\ln(2)}}{2}$

$(d)\quad \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8\ln(3)}}{2}$

Problema 13 La igualdad algebraica $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ es correcta y puede ser utilizada para expresar algunos enteros positivos como una diferencia de cuadrados. ¿Cuáles de los siguientes números se pueden expresar, utilizando dicha igualdad algebraica, como diferencia de cuadrados?

(a) 2014

(b) 2015

(c) 2016

(d) Ninguno de los anteriores

Problema 14 Los números reales $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ son soluciones de la ecuación cuadrática

$$x^2 + bx + c = 0,$$

donde b y c son números reales. ¿Cuál debe de ser el valor de b?

$(a)\quad -1 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

$(b)\quad -1 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

$(c)\quad 1 - \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

$(d)\quad 1 + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

Problema 15 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones cuadráticas tiene un discriminante mayor ó igual a cero?

(a) $3x^2 + x + 1 = 0$

(b) $-3x^2 + x - 1 = 0$

(c) $3x^2 + x - 1 = 0$

(d) $3x^2 - x + 1 = 0$

Problema 16 Seleccione la respuesta correcta que corresponda a la simplificación de la expresión algebraica

$$\left(\left(x^2+1\right)^2+1\right)^2-\left(x^2+1\right)^4.$$

(a) $x^8 + 3x^4 + x^2 + 2$

(b) $2x^4 + 4x^2 + 3$

(c) $x^8 - 3x^4 + x^2 - 3$

(d) $2x^4 + 4x^2 - 3$

Problema 17 La función f está definida por una expresión lineal, es decir, existen números reales a, b tales que $f(x)$ se escribe como $f(x) = ax + b$ para cada x. ¿Cuáles son los valores de a y b si $f(0) = 2$ y $f(1) = -1$?

(a) $a = -\frac{3}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

(b) $a = -\frac{3}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$

(c) $a = \frac{3}{2}$ y $b = -\frac{1}{2}$

(d) $a = \frac{3}{2}$ y $b = \frac{1}{2}$

Problema 18 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f(x) = 2x^3 - x + 3$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces elija el valor que corresponda a $f(-8)$.

(a) 1029 (b) 1013 (c) -1029 (d) -1013

Problema 19 Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f(x) = 5x - 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$, entonces elija el enunciado que sea cierto.

(a) "Existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(a^2+1\right) = -2$".

(b) "Existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(a^2+1\right) = -\pi$".

(c) "Existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(a^2+1\right) = -1$".

(d) "Existe un único $a \in \mathbb{R}$ tal que $f\left(a^2+1\right) = -1 - \sqrt{2}$".

Problema 20 Un triángulo isósceles $\triangle$ABC tiene magnitud 3 unidades en los lados que tienen misma longitud. Si el área del triángulo es de $\sqrt{2}$ unidades, determine cuál es la longitud del tercer lado.

(a) $2\sqrt{2}$ unidades (b) 2 unidades (c) $\sqrt{2}$ unidades (d) 4 unidades

Problema 21 ¿Cuál punto del plano está en la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{2}$?

(a) $(1, -1)$ (b) $(\sqrt{2}, \sqrt{2}\,)$ (c) $(1, -\sqrt{2}\,)$ (d) $(\sqrt[4]{2}/2, \sqrt[4]{2}/2\,)$

Problema 22 Carlos, Pedro y Juan son tres estudiantes a nivel superior del estado de Sinaloa que rentan un departamento compartido en el Distrito Federal, y desan comprar una pantalla led para ver sus programas favoritos de televisión. La pantalla tiene un valor en el mercado de $\$6500.00$. Pero Carlos y Pedro pueden dar sólo el $65\,\%$ y Pedro el $30\,\%$ de lo acordado con Carlos. ¿Cuál es la cantidad que deben de dar respectivamente Carlos, Juan y Pedro?

(a) $\$2954.50$ $\$1268.50$ $\$2277.00$

(b) $\$2955.50$ $\$1269.50$ $\$2275.00$

(c) $\$2957.50$ $\$1264.50$ $\$2278.00$

(d) $\$2957.50$ $\$1267.50$ $\$2275.00$

Problema 23 Considere los subconjuntos del plano cartesiano A $= \{(0, -3), (1, 0), (0, 0), (2, 0), (4, 3)\}$ y B $= \{(x, y) \mid 3x - 2y = 6\}$. ¿Cuál es el conjunto A $\cap$ B?

(a) $\{(0, -3), (2, 0)\}$ (c) $\{(0, -3), (1, 0), (2, 0)\}$

(b) $\{(0, -3), (2, 0), (4, 3)\}$ (d) $\{(0, -3), (2, 0), (0, 0)\}$

Problema 24 La altura de un triángulo equilátero es de $\sqrt{3}$ unidades. ¿Qué dimensión tiene un lado del triángulo?

(a) 1 unidad (b) 2 unidades (c) 3 unidades (d) 4 unidades

Problema 25 ¿Para qué valores del ángulos θ se cumple la relación trigonométrica $\operatorname{sen}(\theta) + \cos(\theta) = 1$?

(a) $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (b) $\pi/2 < \theta \leq \pi$ (c) $\pi < \theta \leq 2\pi$ (d) Para todo θ