



20° Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat.

Edición 2016

Examen para nivel secundaria (Primera etapa).



***Instrucciones:** No utilizar teléfono celular (éste deberá estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio electrónico en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple. Las respuestas del examen se asentarán en la hoja de respuestas anexa.*

***Duración del examen:** Tres horas.*



Problema 1 Establezca cuál de las siguientes relaciones la correcta.

- (a) $\emptyset \in \emptyset$ (b) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (c) $2 \in \{1, \{2\}\}$ (d) $\{\pi, \square, x\} = \emptyset$

Problema 2 Si T es un conjunto, denotamos por $|T|$ a la cantidad de elementos que tiene el conjunto T. Por ejemplo, si $T = \{5, 8, -3, 0\}$, se tiene que $|T| = 4$. Considere los conjuntos $A = \{2016, 2017, 2018, 2019, 2020\}$, $B = \{\emptyset, \infty, \forall, \infty\}$ y $C = \{\iff, \rightarrow, \leftrightarrow, \rightsquigarrow\}$ ¿Cuál de las siguientes relaciones es la incorrecta?

- (a) $3 \leq |B| \leq |C| \leq |A| \leq 5$ (c) $3 \leq |B| \leq |C| \leq |A| < 5$
 (b) $3 \leq |B| < |C| \leq |A| \leq 5$ (d) $3 \leq |B| \leq |C| < |A| \leq 5$

Problema 3 Si $A = \{1, -2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{3, 5\}$, entonces ¿cuál de los siguientes conjuntos es igual al conjunto $(A \cup B) \cap (C \cap B)$?

- (a) \emptyset (b) $\{2, 3\}$ (c) $\{-2, 3\}$ (d) $\{3\}$

Problema 4 Elija la opción correcta en el cual el número real elegido se encuentre en el intervalo cerrado $[-3, -2]$.

- (a) $-7/5$ (b) $\sqrt{3.2}$ (c) $3\sqrt{5}/2$ (d) $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

Problema 5 Sean a y b dos números reales positivos tales que su producto es 1 y el cociente de uno de ellos con el otro es 3. ¿Cuál de las siguientes relaciones la satisfacen a y b ?

- (a) $a^2 + b^2 = (\sqrt{30}/3)^2$ (c) $a^2 + b^2 = -(\sqrt{30}/3)^2$
 (b) $a^2 + b^2 = -\sqrt{3}$ (d) $a^2 + b^2 = \sqrt{3}$

Problema 6 Considere x un número real el cual satisface que su valor absoluto $|x| = 1\frac{1}{7}$, y la distancia de x al punto -3 , en la recta numérica, es $1\frac{6}{7}$. ¿Cuál debe de ser este número real x ?

- (a) $8/7$ (b) $-8/7$ (c) $13/7$ (d) $-13/7$

Problema 7 ¿Cuál es la notación simbólica que nos representa la diferencia

$$(1 + 2x + 3x^2 + \dots) - (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots),$$

donde el primer sumando tiene 100 sumandos, y el segundo 101 sumandos?

- (a) $\sum_{n=1}^{50} 4nx^{2n-1} + 101x^{100}$ (c) $\sum_{n=1}^{50} 4nx^{2n-1} - 101x^{100}$
 (b) $\sum_{n=1}^{51} 4nx^{2n-1} + 101x^{100}$ (d) $\sum_{n=1}^{51} 4nx^{2n-1} - 101x^{100}$

Problema 8 ¿Cuál es la factorización de la expresión algebraica $a^{4/3}b^{2/5} - a^{2/3}b^{4/5}$?

- (a) $(a^{2/3}b^{1/5} - a^{1/3}b^{2/5})(a^{2/3}b^{1/5} - a^{1/3}b^{2/5})$ (c) $(a^{1/5}b^{2/3} - a^{1/3}b^{2/5})(a^{1/5}b^{2/3} - a^{1/3}b^{2/5})$
 (b) $(a^{2/3}b^{1/5} + a^{1/3}b^{2/5})(a^{2/3}b^{1/5} + a^{1/3}b^{2/5})$ (d) $(a^{2/3}b^{1/5} + a^{1/3}b^{2/5})(a^{2/3}b^{1/5} - a^{1/3}b^{2/5})$

Problema 9 ¿Cuál es la conversión de la cantidad $187^\circ 38' 25''$ a radianes?

- (a) 1.042π (b) 1.142π (c) 1.242π (d) 1.342π

Problema 10 ¿Cuál es la cantidad en metros que corresponde a la suma $651 \text{ km} + 1003 \text{ m} + 358000 \text{ mm}$?

- (a) 651361 m (b) 652361 m (c) 653361 m (d) 654361 m

Problema 11 ¿Cuál es el radio de la circunferencia con centro en el origen donde se encuentra la solución (x, y) del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}x - 3y &= 2 \\ 2x + y &= -3\end{aligned}$$

- (a) 2 (b) 3 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{3}$

Problema 12 Si α es una solución de la ecuación algebraica $x^2 + x + 1 = 0$, ¿cuál debe de ser la otra solución de dicha ecuación?

- (a) $\alpha - 1$ (b) $-\alpha - 1$ (c) $-\alpha + 1$ (d) $\alpha + 1$

Problema 13 ¿Cuál es el valor de $\cos(\pi/6)$?

- (a) $\sqrt{3}/2$ (b) $1/2$ (c) $-\sqrt{3}/2$ (d) $-1/2$

Problema 14 Un albañil tiene que comprar clavos galvanizados de $2\frac{1}{2}$ pulgada, los cuales tienen un costo de \$57.50 por kilo. Si el albañil cuenta con \$72.00 para su compra, ¿cuántos gramos de clavos galvanizados le deberán de dar?

- (a) 1242.17 gr (b) 1252.17 gr (c) 1262.17 gr (d) 1272.17 gr

Problema 15 El 16 de febrero de 2016, el Banco de México subió su tasa de interés de referencia de 3.25 a 3.75 por ciento, esto debido a la volatilidad de los mercados financieros internacionales. En el ámbito financiero, se dice que el Banco de México subió 50 puntos porcentuales dicha tasa de interés. Esta tasa de interés es la que cobra el Banco de México a otros bancos por prestarles dinero y, como se observa, lo más seguro es que este dinero vuelva ser prestado, a través de créditos, a las industrias, negocios, personas comunes, etc., que requieran de dicho dinero. Por lo tanto, un banco privado podría duplicar, triplicar, etc., el cobro de interés por el préstamo de estos dineros. Si un banco privado cobra el 17 por ciento anual de interés por préstamos del dinero, y un usuario solicita \$100000.00 de préstamo a pagar en un año, ¿cuál es la ganancia neta del banco?

- (a) \$12950.00 (b) \$13050.00 (c) \$13150.00 (d) \$13250.00

Problema 16 ¿Cuál de las siguientes desigualdades se cumple para todo número real a ?

- (a) $a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 12a - 4 \geq 0$ (b) $a^4 - 6a^3 + 13a^2 + 12a - 4 \geq 0$ (c) $a^4 - 6a^3 + 13a^2 - 12 + 4 \geq 0$ (d) $a^4 - 6a^3 - 13a^2 - 12a - 4 \geq 0$

Problema 17 Un tambo de lámina de 200 litros de capacidad se llena de agua a través de una manguera. El flujo de agua es constante, y después de un minuto el tambo tiene un volumen de $\frac{3}{8}$ partes de su capacidad. ¿Cuánto tiempo debe de pasar para que se llene de agua el tambo de lámina?

- (a) 2 min 40 s (b) 2 min 43 s (c) 2 min 46 s (d) 2 min 49 s

Problema 18 Un salón de clases de segundo grado de secundaria está constituido de 33 estudiantes, de los cuales el 52% son mujeres. De ellas, el 67% desea estudiar una carrera en alguna universidad. Para conseguirlo, deberán de obtener de promedio final un 8 de calificación como mínimo en sus estudios de secundaria y bachillerato. Si por el momento el 51% llevan 8 de calificación como mínimo, entonces ¿cuántas alumnas por el momento tienen que trabajar duro para obtener un promedio de 8 como mínimo de calificación?

- (a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

Problema 19 Considere la función lineal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x - 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Cómo debe de estar dada una función lineal $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga las propiedades de que $g(1) = f(-1)$ y $g(-1) = f(0)$?

- (a) $g(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ (c) $g(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$
 (b) $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$ (d) $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$

Problema 20 Elija la ecuación cuadrática que tenga por raíces a los números -2 y 3 .

- (a) $2016^{2016}x^2 + 2016^{2016}x + \left(2012 \sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$
 (b) $2016^{2016}x^2 - 2016^{2016}x + \left(2012 \sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$

$$(c) \quad 2016^{2016}x^2 - 2016^{2016}x - \left(2012 \sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$$

$$(d) \quad 2016^{2016}x^2 + 2016^{2016}x - \left(2012 \sqrt[2016]{6}\right)^{2016} = 0$$

Problema 21 Considere la función cuadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3x^2 - x + 2$ para cada $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es la cantidad de números reales x 's que satisfacen que $f(x) = 26$ o $f(x) = 0$.

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

Problema 22 ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta que tiene por ecuación $2x - 5y - 7 = 0$?

- (a) -2 (b) 2 (c) -2/5 (d) 2/5

Problema 23 Un triángulo isósceles tiene una altura de 2 unidades, y satisface la propiedad de que la suma de las cantidades de su perímetro con el área es de 30. ¿Cuál es el promedio de la longitud de uno de sus lados con el de la base?

- (a) 7.5 (c) 30
(b) 15 (d) Ninguno de los anteriores.

Problema 24 Un triángulo inscrito en un círculo de diámetro 5 unidades tiene área de 11.5 unidades cuadradas. ¿Cuál es el área de la región del círculo que queda fuera del triángulo?

- (a) $8.135 u^2$ (b) $8.136 u^2$ (c) $8.137 u^2$ (d) $8.138 u^2$

Problema 25 Sean $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano. Se define la distancia entre P y Q (la longitud del segmento que los une), denotada por $d(P, Q)$, a través de la fórmula

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Observe que $d(P, Q) = d(Q, P)$. Si un triángulo en el plano tiene por vértices los puntos $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ y $C = (2, 1)$, entonces ¿cuál es su perímetro?

- (a) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} u$ (b) $2 + \sqrt{3} + \sqrt{5} u$ (c) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{5} u$ (d) $2 + \sqrt{2} + \sqrt{5} u$