

Concurso Nacional de Matemáticas Pierre Fermat 2012

Examen para Nivel Superior Primera Etapa

Instrucciones: No utilizar celular (éste deberá de estar apagado), calculadora ó cualquier otro medio en el cual se puedan realizar operaciones aritméticas. No hay sugerencias a los problemas; cualquier pregunta que se haga deberá de estar relacionada con la redacción del problema y/o con alguna duda sobre el conocimiento propio de la matemática. Deberá de contestar los siguientes problemas de opción múltiple.

Duración de Examen: 3:00 horas.

Problemas

Problema 1. Para cualquier triángulo, ¿Cuál es la distancia l entre los centros del círculo Circunscrito (radio R) y el círculo inscrito (radio r)?

- a) $l = R - r$ b) $l = r - R$ c) $l = R^2 - r^2$ d) $l = r^2 - R^2$

Problema 2. Las rectas $L_1 = (5, -6, 3)t + (2, 1, -4)$ y $L_2 = (1, 3, 7)t + (5, 3, -6)$ ¿Cómo son?

- a) Coplanares b) Paralelas c) No se intersectan d) Se intersectan en un punto

Problema 3. Cuantos trapecios hay que tengan área igual a 2 y la suma de sus diagonales es 1

- a) 0 b) 1 c) 2 d) Una infinidad

Problema 4. Se da $\overrightarrow{PC} \perp \overleftarrow{KM}$. Los puntos A y B están del mismo lado de \overleftarrow{KM} que C , pero A y B están en lados opuestos de \overleftarrow{PC} . A está del mismo lado que \overleftarrow{PC} que K . Si $\triangle ACP \cong \triangle BCP$. ¿Cómo es el $\angle KPA$ con respecto a $\angle MPB$?

- a) $\angle KPA < \angle MPB$ b) $\angle KPA = \angle MPB$ c) $\angle KPA > \angle MPB$ d) No se puede saber

Problema 5. ¿Cuántos números pitagóricos ($a^2 + b^2 = c^2$) existen que cumplen $|a - b| = 1$?

- a) 1 b) Menos de 100 c) Una infinidad d) No se puede saber

Problema 6. ¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos de un polígono convexo de n lados

- a) $(n - 1)180$ b) $(n + 1)180$ c) $(n - 2)180$ d) $(n + 2)180$

Problema 7. Se sabe que la longitud de un triángulo equilátero ΔABC es 6 y que P, Q, R son los puntos medios de sus lados. Los arcos \widehat{PQ} , \widehat{PR} y \widehat{QR} tienen como centro los vértices del triángulo. Determine el área de la región PQR

- a) $3\sqrt{27} - \pi/2$ b) $3\sqrt{27} + \pi/2$ c) $\pi/2 - 3\sqrt{27}$ d) $\pi/2 + 3\sqrt{27}$

Problema 8. ¿Cuál es el valor de la siguiente integral?

$$\int_0^1 (x^6 + x^3)\sqrt[3]{x^3 + 2} dx.$$

- a) $\frac{35\sqrt{3}}{36}$ b) $\frac{36\sqrt{3}}{35}$ c) $\frac{36\sqrt{6}}{35}$ d) $\frac{36\sqrt{5}}{35}$

Problema 9. Cuánto aproximadamente mide el área entre los círculos $x^2 + y^2 = 4$ y $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

- a) 0.6 b) 1.22 c) 1.5 d) 2

Problema 10. Encuentra el valor de b para que la igualdad sea correcta $\int_0^{10} f(x) dx = 10$ con

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq b \\ \pi & \text{si } x > b \end{cases}$$

- a) $\frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 4(1/2)(\pi - 1)}}{2(1/2)}$ b) $\frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 4(1/2)(1 - \pi)}}{2(1/2)}$ c) $\frac{-\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 4(1/2)(\pi - 1)}}{2(1/2)}$ d) No hay solución

Problema 11. Si $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, entonces ω^{2012} es:

- a) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ c) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ d) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Problema 22. Calcule $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$, donde λ_1 y λ_2 son los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

- a) $a^2 + 2bc + d^2$ b) $a^2 - 2bc + d^2$ c) $b^2 + 2ad + c^2$ d) $b^2 - 2ad + c^2$

Problema 23. En el conjunto $\mathcal{SM}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices reales cuadradas simétricas de orden 2 consideramos la relación de congruencia: dos matrices A y B se llaman *congruentes* si existe una matriz invertible P tal que $B = P^t A P$, donde P^t es la matriz P transpuesta. Es fácil ver que la congruencia es una relación de equivalencia. Calcule el número de las clases de equivalencia.

- a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Problema 24. Están dadas cuatro series convergentes. Determine, la suma de cuál de estas no es un número entero.

- a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Problema 25. Calcule el número de las aristas de un cubo de dimensión 4.

- a) 16 b) 20 c) 32 d) 64